

विषय एक: गणित की कक्षा

गणित शिक्षण में अस्पष्टता की भूमिका

जीनत रहमान, टाटा सामाजिक विज्ञान संस्थान, मुंबई
भेजेंद्र कश्यप (व्याख्याता), शा० उ० मा० विद्यालय, सिर्री, कुरुद, धमतरी

इस लेख में गणित शिक्षण में अस्पष्टता (Ambiguity) के महत्वों को वास्तविक शिक्षण के उदाहरण से उभारा गया है। यहाँ 'अस्पष्टता' की परिभाषा अस्पष्टता शब्द की ही तरह, किसी स्पष्ट परिभाषा द्वारा सीमित नहीं हो सकता। हालांकि, कई शोधकर्ताओं ने गणित शिक्षण के साहित्य और अनुसन्धान में अस्पष्टता को एक महत्वपूर्ण संसाधन के रूप में पहचाना है (Barwell, 2005; Byers, 2010; Foster, 2011)। लेकिन फिर भी इसके महत्व को पाठ्यक्रम और शिक्षण प्रशिक्षणों में नहीं देखा जाता है। इसकी एक बड़ी वजह इसके साथ जुड़ी गलत अवधारणायें हैं। गणित को प्रायः स्पष्ट, सार्वभौमिक, पक्का, निरपेक्ष, तथा वस्तुनिष्ठ माना जाता है। अतः, गणित शिक्षण में भी इन्हीं अवधारणाओं पर ज्यादा बल दिया जाता है। जिसके परिणामस्वरूप गणित की कक्षा में बच्चों के जवाबों की पहचान सिर्फ सही या गलत के रूप में ही सीमित रह जाती है, और गणित के शिक्षकों से यह अपेक्षा रहती है कि वे बच्चों को सही जवाब सिखायें और जितना हो सके अस्पष्टता को हटाएँ। जबकि, ऐसा रवैया व दृष्टिकोण बच्चों की विभिन्न प्रकार की प्रतिक्रियाओं को आने से रोकता है। ऐसा करने से, अस्पष्टता से होने वाली किसी भी प्रकार के तर्क और चर्चा के अवसरों को उत्पन्न होने से रोकती है। अगर हम राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा का गणित शिक्षण पर आधार पत्र 2006 के सदस्यों के अनुसार सक्रिय अधिगम की प्रणाली को वास्तविक रूप से कक्षा में लाना चाहते हैं, तो हमें ऐसी परिस्थितियों और अवसरों के लिए जगह बनानी होगी जहाँ बच्चे अधिगम के दौरान अपनी सोच और भावों को निःसंदेह, निःसंकोच, बिना डरे व्यक्त कर सकें। गणित शिक्षण में अस्पष्टता, बच्चों की जिज्ञासा को जीवंत बनाता है और उनको निष्क्रिय से सक्रिय रूप में गणितीय प्रक्रिया में शामिल होने का अवसर प्रदान करता है।

इस लेख में छत्तीसगढ़ के एक गणित शिक्षक के शिक्षण का विश्लेषण है। उनकी शिक्षण की खास बात यह है कि वे अपने गणित शिक्षण में अस्पष्टता का काफी इस्तेमाल करते हैं। यह उनकी शिक्षण प्रणाली की एक अनोखी बात है, जिससे कक्षा में बच्चों में काफी तर्क और चर्चा की परिस्थितियाँ उत्पन्न हुईं। लेख में उनकी शिक्षण के कुछ वास्तविक उदाहरणों का वर्णन और विश्लेषण किया गया है। अपनी शिक्षण प्रणाली में उन्होंने बच्चों की प्रतिक्रियाओं को सही या गलत बताने के बजाये उसमें निहित अस्पष्टता को उभारा है, और न सिर्फ जवाबों में, बल्कि सवालों की अस्पष्टता को भी कक्षा में सम्मिलित किया है। साथ ही साथ, उन्होंने अपनी प्रस्तुति एक प्राधिकारी जैसी नहीं, जो सब सवाल का सही जवाब दे, बल्कि एक सहभागी जैसा बनाया है, जो अवधारणाओं के निर्माण और उससे जुड़े तर्क की एक साझी समझ बना सके।

परिचय

इस लेख में प्रस्तुत किया गया अनुसंधान असल में एक बड़े अध्ययन का हिस्सा है, जिसके अंतर्गत छत्तीसगढ़ के 10 उच्च माध्यमिक सरकारी स्कूलों में क्लिक्स (CLIX) के ज्यामितीय तर्क (Geometric Reasoning) मॉड्यूलों का प्रयोग किया गया। इन 10 विद्यालयों के गणित शिक्षकों की दो दिवसीय कार्यशाला का आयोजन किया गया जिसमें उन्हें क्लिक्स के ज्यामितीय तर्क मॉड्यूल के बारे में बताया गया। क्लिक्स के ज्यामितीय तर्क मॉड्यूल का मुख्य उद्देश्य कक्षा में चर्चा और तर्क द्वारा बच्चों में ज्यामितीय तर्क का विकास करना है। इस मॉड्यूल में 3 अहम गतिविधियाँ हैं: वर्कबुक, हाथ से करने वाली गतिविधियाँ, और कंप्यूटर पर करने वाली गतिविधियाँ।

अनुसंधान की विधि और तर्काधार

अनुसंधान की पद्धति में मैंने केस-स्टडी, ऑटोबायोग्राफिकल, नैरेटिव (आत्म-चरित्रात्मक, आत्म-कथात्मक) जैसे मान्यता-प्राप्त पद्धतियों को सम्मिलित किया है। इस अध्ययन में मैंने स्वयं की भूमिका एक सहभागी के रूप में रखने का प्रयास किया है, जहाँ मैंने शिक्षक के साथ कक्षा से पहले योजना और कक्षा के बाद विचार-विमर्श करने का पूर्ण प्रयास किया है।

अध्ययन में शामिल 10 शिक्षकों में से एक विशेष शिक्षक को चुनने का कारण उनकी कक्षा में उभरी बातचीत की अलग प्रकृति है। उनकी कक्षा में बैठकर मैंने देखा कि विद्यार्थी कक्षा में बातचीत, उत्तर या तर्क करने में बहुत सहज महसूस कर रहे थे। जहाँ पारंपरिक गणित कक्षा में केवल 2-3 उच्च प्रदर्शन करने वाले विद्यार्थी ही हमेशा जवाब देते हुए पाए जाते हैं, उनकी कक्षा में बहुत सी लड़कियाँ जवाब देती हैं और कभी-कभी लड़के भी जवाब देते हैं, और इतना ही नहीं, बल्कि कभी-कभी शिक्षक को गणित में चुनौती या सुधार की सलाह भी देते हैं।

शुरुआत में उनकी कक्षा में लगभग सभी लड़कियाँ भाग ले रही थीं मगर लड़कों में केवल कुछ एक ही भाग लेते थे, यह भी उनकी कक्षा की अनोखी बात लगी क्योंकि गणित शिक्षण साहित्य में अक्सर इसका उल्टा बताया जाता है। हालांकि, यह भी शिक्षक की मान्यता का प्रदर्शन हो सकता है जहाँ शिक्षक यह मानते हैं कि लड़कियाँ लड़कों की तुलना में अधिक ईमानदार और आज्ञाकारी होती हैं।

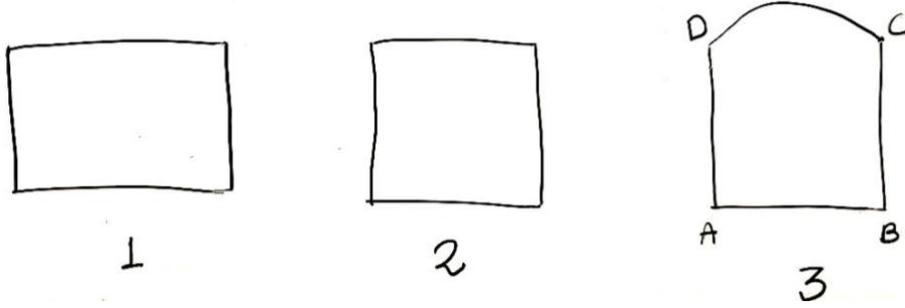
गणित की कक्षा में इस तरह विद्यार्थियों द्वारा चुनौती या सुधार की सलाह आने के पीछे शिक्षक की इस अनोखी शिक्षण पद्धति का बहुत बड़ा हाथ है। इस शिक्षण पद्धति के अनुसार शिक्षक, कक्षा में शिक्षण के दौरान जान-बूझ कर कुछ गलत कथन, विवरण या चित्र बताते या बनाते हैं, जिससे छात्रों को ऐसे मौके मिलें जहाँ वो अपनी भूमिका केवल चुप-चाप सुनने तक ही सीमित न रख, अपितु गणितीय ज्ञान के विकास में खुद को बराबर भागीदारी समझ सकें। यह शिक्षण पद्धति दिलचस्प और महत्वपूर्ण पद्धति के रूप में सामने आया जहाँ शिक्षक ने बड़ी कुशलता से अस्पष्टता का उपयोग किया है। यह एक बहुत ही शक्तिशाली रणनीति के रूप में सामने आया जहाँ शिक्षक अपने शासन को लागू करने के बजाय छात्रों को निर्णय लेने देते हैं और इस प्रकार गणित के सामाजिक विवेकपूर्ण स्वभाव को सम्मिलित करते हैं। इस प्रकार यह प्रक्रिया छात्रों को शिक्षक के साथ एक सहभागी की तरह अवधारणाओं के निर्माण और उससे जुड़े तर्क की एक साझी समझ बनाने का अधिकार देती है।

मुख्य अनुभाग और चर्चा के बिंदु

इस लेख में अध्यापक के स्वयं लिखे कक्षा के अनुभव को प्रस्तुत किया गया है और अस्पष्टता के नजरिये से उसका विश्लेषण किया गया है। यहाँ अध्यापक भेजेन्द्र कश्यप (व्याख्याता), शा० उ० मा० विद्या सिरी, कुरुद, धमतरी छत्तीसगढ़ में कक्षा 9वीं में गणित का अध्यापन करते हैं। इसी अध्यापन के संबंध में उनके द्वारा स्वयं लिखे गए अध्यापन अनुभवों को यहाँ प्रस्तुत किया गया है। यहाँ वे कक्षा में तीन प्रकार की शिक्षण प्रक्रियाओं के बारे में बता रहे हैं। पहला, जिसमें वह कक्षा में एक वर्कबुक के सवाल पर बच्चों से चर्चा कर रहे हैं। दूसरा, जिसमें वह कक्षा में साइकिल वाल्व-ट्यूब और माचिस की तीलियों द्वारा हाथ से करने वाली गतिविधि का विवरण देते हैं और तीसरा, जिसमें वे कंप्यूटर प्रयोगशाला में बच्चों द्वारा एक ज्यामितीय खेल खेलने के दौरान आने वाली अस्पष्टता के बारे में बताते हैं।

कक्षा में पढ़ाने के दौरान हमने बच्चों की अवधारणाओं को जानने का प्रयास किया। इसमें एक ज्यामिति आधारित किताब बच्चों को प्रदान किया, जिसमें कई अलग-अलग आकृतियों की पहचान करने कहा गया।

“इस सन्दर्भ में मैं अपना अनुभव प्रस्तुत करता हूँ, मैंने चतुर्भुज की अलग-अलग आकृतियाँ श्यामपट पर बनाया।



अब मैंने बच्चों से इस आकृति के बारे में पूछा कि यह आकृति क्या है?

बच्चों ने जवाब दिया कि - सर, यह (1 और 2) चतुर्भुज है। 3 के बारे में पता नहीं।

मैंने पुनः प्रश्न किया कि - बच्चों, आप लोगों ने किस आधार पर इस आकृति को चतुर्भुज कहा?

बच्चों ने जवाब दिया - सर, परिभाषा के आधार पर 1, और 2 चतुर्भुज हैं। अर्थात्, चार भुजा और चार शीर्ष।

मैंने पुनः प्रश्न किया - कि तब तो चित्र 3 भी चतुर्भुज होगा।

बच्चों ने जवाब दिया - सर, नहीं होगा क्योंकि चित्र 3 में केवल तीन भुजाएँ हैं और चार शीर्ष हैं।

फिर मैंने उनसे भुजा के बारे में पूछा -

बच्चों ने जवाब दिया - सर, भुजा रेखा का एक भाग है।

फिर मैंने पूछा - चित्र 3 में भुजा CD रेखा का भाग है, कि नहीं?

प्रतिउत्तर में बच्चे शांत थे।

तब मैंने बच्चों को समझाया कि चित्र क्रमांक 3 भी एक चतुर्भुज है, दिए हुए परिभाषा के अनुसार। यह सुनकर बच्चे आश्चर्य पूर्वक मेरी ओर देख प्रश्न पूछा कि सर, यह चतुर्भुज कैसे होगा?

तब मैंने रेखा की परिभाषा बताया, फिर उसके प्रकार के बारे में बताया, कि रेखा का न तो प्रारंभिक बिंदु होता है और न ही अंतिम बिंदु, यह दो प्रकार के होते हैं:

1) सरल रेखा



2) वक्र रेखा



तो हमारे चित्र में वक्र रेखा का प्रयोग हुआ है, अतः यह भी चतुर्भुज होगा। और, इससे वे संतुष्ट हो गए। इस कक्षा कार्य में मुझे यह अनुभव हुआ कि बच्चों को परिभाषा रटा कर और चित्र दिखाकर चतुर्भुज का अध्ययन कराया गया।“

यहाँ, मैं पाठकों को सावधान कराना चाहूंगी कि अस्पष्टता से मेरा मतलब यह नहीं है कि बच्चों को गलत सिखाया जाये, बल्कि गणित में मौजूद कई विवरणों या परिभाषाओं से आने वाली अस्पष्टता को उभारा जाये, ताकि किसी सही गणितीय संकल्पना तक पहुँचा जा सके।

इस भाग में शिक्षक हमें कक्षा में हो रहे "चतुर्भुज की परिभाषा" पर चर्चा करने की बात कर रहे हैं। यहाँ उन्होंने यह बात बहुत खूब कही है कि सिर्फ परिभाषा रटने से और बस थोड़े से पहचाने हुए उदाहरणों के सीमित अनुभव से बच्चों में विश्लेषण करने की सोच नहीं आती है। क्योंकि परिभाषा के अनुसार तो वक्र-भुजा भी भुजा है, तो क्या सिर्फ इतना बोलना कि चतुर्भुज चार भुजाओं से बनता है, काफी है?

प्रोजेक्ट वर्क के अंतर्गत हमने पिन-व्हील और माचिस की तीलियों की सहायता से ज्यामितीय आकृतियों का अध्ययन किया। इस लेवल में बच्चों ने माचिस की तीलियों के द्वारा अलग-अलग ज्यामितीय आकृतियों का निर्माण किया। इसमें बच्चे आकृतियाँ बनाकर, परिभाषा के आधार पर, आकृतियों की पहचान करना सीखे, और एक बच्चे ने वर्ग बनाकर पूछा कि यह आकृति चतुर्भुज की परिभाषा के अनुरूप नहीं है तो इसे क्या कहेंगे।

मैंने उस बच्चे से पूछा कि यह मॉडल कैसे चतुर्भुज की परिभाषा के अनुरूप नहीं है बताओ, स्पष्ट करो।

बच्चे ने तुरंत जवाब दिया- चतुर्भुज में चार भुजाएँ हैं और चार शीर्ष हैं, इसीलिए मेरे विचार से यह चतुर्भुज नहीं है।

उसके प्रतिउत्तर को सुनकर बहुत अच्छा लगा और मन ही मन यह सोचने लगा कि अब बच्चे आकृतियों की पहचान करना सीख रहे हैं।

और मैंने उसे शाबाशी देते हुए कहा "very good" और पुनः एक डस्टर हाँथ में लेकर एक प्रश्न पूछा कि बेटा ये क्या है? कौन सी आकृति है? वह तुरंत समझ गया और माचिस की तीली द्वारा बनाये मॉडल को पहचान कर बोला कि सर यह एक क्यूब है। मैंने फिर उससे प्रश्न किया कि तुमने अब इसकी पहचान कैसे की?

उसने अपने उत्तर में कहा कि - सर, मैंने इस आकृति की पहचान उसके प्रॉपर्टी (गुण) से किया।

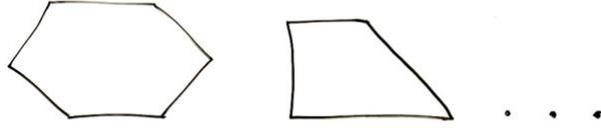
क्यूब की प्रॉपर्टी यह है कि उसके 8 शीर्ष होते हैं और सभी शीर्ष एक दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। 12 edge equal lengths के होते हैं। 6 फलक होते हैं आदि। इस प्रकार से मेरा मॉडल एक क्यूब या घन हुआ, तथा बच्चे इसके माध्यम से 2D-आकृतियों और 3D-आकृतियों को पहचानना भी सीखे। इस लेवल में मेरा अनुभव यह रहा कि बच्चे आकृतियों को देखकर, 2D-आकृति और 3D-आकृति को पहचान करना सीखे।

गणित की यह अवधारणा कि वह अमूर्त, स्पष्ट, सार्वभौमिक, पक्का, निरपेक्ष, तथा विषयनिष्ठ है, उसे वास्तविक जीवन से दूर ले जाता है। यही अवधारणा काफी समय हमें वस्तुओं या वास्तविक जीवन के उदाहरणों से गणित सीखने से रोकता है। क्या हमें ऐसा लगता है कि वस्तुओं का प्रयोग केवल बच्चों का ध्यान आकर्षण करने या बस मजे के लिए किया जाये, असल गणित तो किताबों के प्रश्न सुलझाने में ही है? यहाँ जब बच्चे माचिस की तीलियों और रबर की वाल्व ट्यूब से वर्ग बनाते हैं तो उससे शीर्ष नहीं दिखता क्योंकि वह वाल्व ट्यूब से जुड़ा है। लेकिन गौर फरमाने की बात यह है कि इस बने हुए वर्ग में खामियाँ दिखने के बाउजूद शिक्षक ने कक्षा में इसका बहुत अच्छा इस्तेमाल किया।

कंप्यूटर आधारित - इस लेवल का उद्देश्य यह है कि बच्चों में तर्क शक्ति का विकास हो। इस लेवल में क्लिक्स (CLIX) के द्वारा एक गेम तैयार किया गया, जिसके अलग-अलग लेवल हैं। इस गेम में ज्यामितीय आकृतियाँ दी हुई हैं। इसमें क्लू (clue) के माध्यम से एक आकृति को रखना है, और अन्य आकृतियों को हटाना है।

जैसे, बच्चे इस लेवल में पहुंचे तो प्रारम्भ में उन्हें प्रश्नों को हल करने में समस्याएं आ रही थीं। मैंने उन समस्याओं को जानने का प्रयास किया, और वहीं कंप्यूटर लैब में ब्लैक बोर्ड के माध्यम से उन समस्याओं को दूर किया। मैं यह समस्या विस्तृत रूप से प्रस्तुत करता हूँ।

बच्चे पुलिस क्वाड का गेम खेल रहे थे। उनके स्क्रीन में कुछ आकृतियाँ आईं ।।।।



अब प्रश्न यह था कि "समान्तर भुजाओं का जोड़ा नहीं है।"

कुछ बच्चे बार-बार इसका उत्तर गलत दे रहे थे। मैंने उनकी समस्या को जानने का प्रयास किया। और देखा कि बच्चों को समान भुजा और समान्तर भुजा को समझने में परेशानी हो रही है।

फिर मैंने उन्हें रेखा के बारे में वृस्तृत रूप से बताया समान मतलब *equal* और समान्तर मतलब ऐसी दो रेखाएं जो एक दूसरे से समान अंतर पर हो बताया।

तब बच्चों ने आसानी से इस गेम के प्रश्नों को हल करना शुरू किया।

इस प्रकार उस अध्यापन में मेरा अनुभव यह रहा कि बच्चों में शब्दों का उचित ज्ञान नहीं है। कई शब्द ऐसे होते हैं, जिन्हे सुनकर ही बता सकते हैं कि क्या है।

उदहारण:- रामानंद अर्थात् राम+आनंद, उसी प्रकार समान्तर का अर्थ, समान + अंतर ।

किसी भी ज्ञान प्रणाली या विषय की अपनी शब्दावली या भाषा होती है। अतः गणित सिखाने में एक उद्देश्य यह भी रहता है कि विद्यार्थी अपनी रोजमर्रा की भाषाओं के उपयोग से गणितीय भाषा का उपयोग करने लगे। यह सोच गणित की ऐसी अवधारणा बनाती है जिसमें गणित केवल गणितीय भाषा के उपयोग से ही संभव है, और हम बच्चों को उनकी भाषा में गणित नहीं सिखा सकते। जबकि, यह हमें या शिक्षकों को अपनी भाषा में बच्चों के साथ बातचीत करने से रोकता है, क्योंकि ऐसी स्थिति में हम गणित पर नहीं बल्कि भाषा पर ध्यान केंद्रित कर रहे हैं।

प्रोफेसर अनिल सदगोपाल जो एक भारतीय शिक्षाविद् और कार्यकर्ता हैं, और कई पुरस्कारों और सम्मानों से नवाजे जा चुके हैं, हाल ही में उन्होंने टाटा सामाजिक विज्ञान संस्थान, मुंबई में एक वार्ता में शिक्षा में मातृ-भाषा को बहुत महत्व दिया और कहा कि बच्चों को उनकी मातृ-भाषा में सिखाना चाहिए। उन्होंने बताया कि निजी अंग्रेजी विद्यालयों में बच्चें नहीं सीखते क्योंकि उन्हें उनकी मातृ-भाषा में नहीं सिखाया जाता।

अतः अंत में मैं यही दलील देना चाहूंगी कि जिस तरह बच्चे किसी अवधारणा को अपनी मातृ-भाषा में बेहतर सीखता है, वैसे ही गणित की प्रकृति और उसकी भाषा समझने के लिए हमें वास्तविक जीवन की भाषा और गणित की अस्पष्टता के द्वंद्वत्मक संबंध पर ध्यान देना होगा।

उद्धरण

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education*, 19(2), 117-125.

Byers, W. (2010). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton, NJ: University Press.

Foster, C. (2011). Productive ambiguity in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 3-7.

National Council for Educational Research and Training (2006). *Position paper of national focus group on teaching of mathematics*. New Delhi: NCERT.
