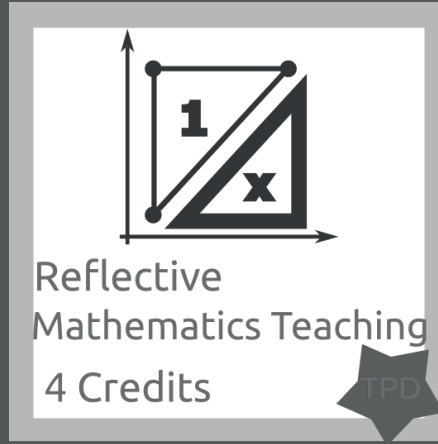




# स्नातकोत्तर प्रमाणपत्र आईसीटी युक्त विर्मशपूर्ण शिक्षण

S02 चिंतनशील गणित शिक्षण  
पुस्तिका



2017



CONNECTED LEARNING INITIATIVE

# गणित

## ज्यामितीय तर्क

# यह कार्यपुरित्तका मेरी है

नाम: यूजरनेम:  
स्कूल: कक्षा:

**CLix मॅथेमॅटिक्स का समूह**  
सूची श्रीनिवास  
जयश्री एस.  
अरिंदम बोस  
रुची कुमार  
आरती बापट  
सौरभ खन्ना  
जीनाथ रहमान  
सायली चौगले

## CLix (2017)

TISS/CEI&AR/CLix/HB (T)/8Jun'17/02

दी कनेक्टेड लर्निंग इनिशिएटिव (CLix) माध्यमिक स्कूल के विद्यार्थियों के लिए बनाई गई तकनीकी-युक्त पहल है। इस पहल का आरंभ टाटा ट्रस्ट्स ने किया था जिसमें टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ सोशल साइंसेज, मुंबई और मॅसॅच्युसेट्स इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी, केम्ब्रिज यह दो संस्थाएँ संस्थापक सहयोगी हैं।

## अन्य सहयोगी

सेंटर फॉर एज्युकेशन रिसर्च एण्ड प्रॅक्टिस – जयपूर, मिजोरम युनिवर्सिटी – ऐजवाल, एकलव्य – मध्य प्रदेश, होमी भाभा  
सेंटर फॉर साइंस एज्युकेशन – मुंबई, नॅशनल इन्स्टिट्यूट ऑफ एडवॉन्सड स्टडीज – बेंगलुरु, स्टेट काउंसिल ऑफ  
एज्युकेशनल रिसर्च एण्ड ट्रेनिंग (एससीइआरटी) ऑफ तेलंगाना – हैदराबाद, टाटा क्लास एज – मुंबई, युनिसेफ छत्तिसगढ़ –  
रायपूर, गवर्नमेंट ऑफ राजस्थान, गवर्नमेंट ऑफ मिजोरम, गवर्नमेंट ऑफ छत्तिसगढ़ एण्ड गवर्नमेंट ऑफ तेलंगाना

[www.clix.tiss.edu](http://www.clix.tiss.edu)

आपके मन में कोई सवाल, सुझाव या संदेह हो, तो आप वे हमें  
[contact@clix.tiss.edu](mailto:contact@clix.tiss.edu) इस इमेल पते पर भेज सकते हैं।

मुख्यपृष्ठ का डिज़ाइन : मनोज भंडारे

फॉर्मेटिंग : अक्षरमाया मुंबई, मिहिर मानकर

अनुवादक : भरत त्रिपाठी, मातृभाषा मल्टीमीडिया सॉल्यूशन्स, मुम्बई इंडिया



यह दस्तावेज क्रिएटिव कॉमन्स के तहत शेअर अलाईक ४.० लाईसेन्स द्वारा प्रकाशित किया गया है।

# सूची

## गणितज्यामितीयतर्क - क्षमता मॉड्यूल

उद्देश्य	1
मॉड्यूल की रूपरेखा	2
<b>इकाई 1 : आकृति की अवधारणा</b>	3
पाठ 1: आकृति क्या होती है	4
<b>इकाई 2 : आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन</b>	6
पाठ 2: आकृतियों का विश्लेषण	7
पाठ 3: आकृतियों का विश्लेषण	10
<b>इकाई 3 : आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करना</b>	12
पाठ 4: आकृतियों का वर्गीकरण	13
पाठ 5: आकृतियोंको परिभाषित करना	15
पाठ 6: विशिष्ट चतुर्भुजोंको परिभाषित करना	18
पाठ 7: विशिष्ट चतुर्भुजोंकी परिभाषा है	20
<b>इकाई 4 : गुण-आधारित तर्क-क्षमता</b>	22
पाठ 8: विशिष्ट चतुर्भुजोंके बीतका संबंध	24
पाठ 9: संबंधों का निरूपण	27
पाठ 10: परिभाषाओं पर चर्चा	30
<b>इकाई 5 : प्रमाणोंकी जरूरतको समझना</b>	32
पाठ 11: मध्यबिन्दु - पड़ताल	34
पाठ 12: कोणोंके योगका गुणधर्म	36
पाठ 13: प्रमाणकी आवश्यकता	39
पाठ 14: प्रमाण का लेखन	41
पाठ 15: सही और गलत सिद्ध करना	42





# CLIX गणित

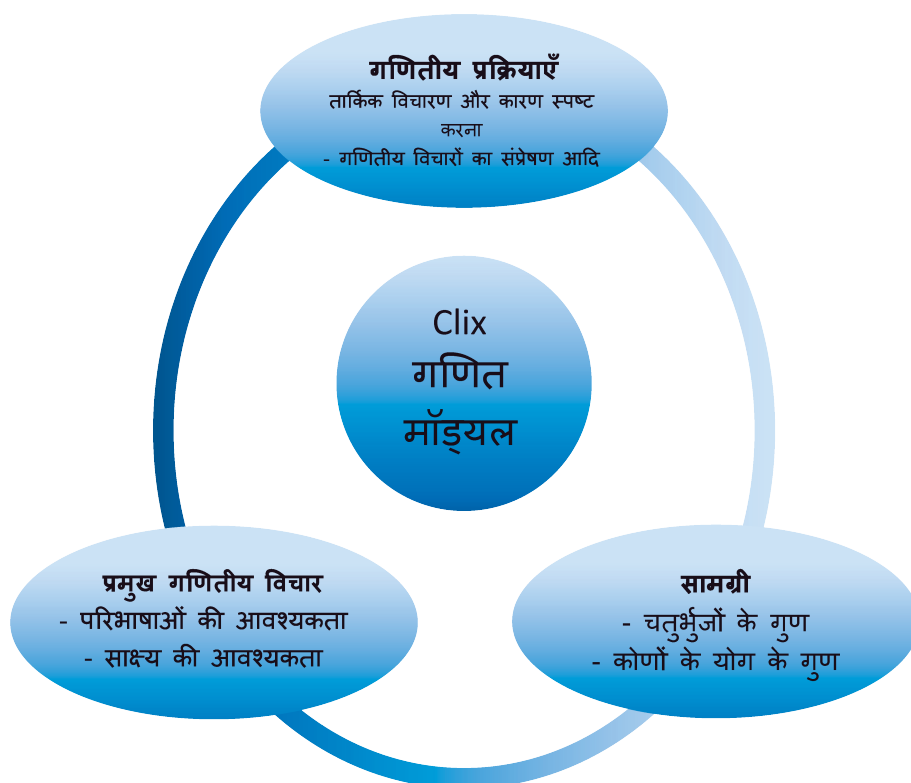
## ज्यामितीयतर्क-क्षमतामॉड्यूल

“ऐसे शिक्षण समुदायों का निर्माण करना, जहाँ सभी छात्र और शिक्षक साथ मिलकर गणित विषय से रू-ब-रू होते हैं और गणित की एक संकाय के रूप में साझा समझ विकसित करते हुए आगे बढ़ते हैं।”

### उद्देश्य

Clix गणित के मॉड्यूल्स का लक्ष्य तीन अलग-अलग लेकिन परस्पर संबंधित पहलुओं की जानकारी देना है।

- सामग्री: वे ज्यामितीय अवधारणाएँ और विचार, जिन्हें छात्रों को पढ़ना है।
- प्रमुख गणितीय विचार: उदाहरण के लिए - गणित में परिभाषाओं की प्रकृति और उद्देश्य क्या होता है, साक्ष्य क्या होते हैं, उनकी आवश्यकता क्यों पड़ती है और किसी चीज़ को 'सिद्ध' या 'मिथ्या सिद्ध' करने का क्या अर्थ होता है आदि।
- गणितीय प्रक्रियाएँ: छात्रों से अपेक्षा की जाती है कि वे - तर्क-क्षमता, अनुमान लगाने और उसका परीक्षण करने, गणितीय विचारों पर चर्चा और बहस करने और उनके अपने गणितीय विचार तैयार करके उन्हें दूसरों के सामने सिद्ध करने या मिथ्या सिद्ध करने जैसे कार्यकलापों में सक्रियता से हिस्सा लेंगे।



## मॉड्यूल की रूपरेखा

	युनिट का नाम	वर्णन	डिजिटल संसाधन
युनिट 1	आकृति की अवधारणा	इस युनिट में कुछ ऐसी बुनियादी अवधारणाओं पर चर्चा की गई है, जो ज्यामिति की समझ विकसित करने की दृष्टि से अनिवार्य होती हैं। इस युनिट में मुख्य रूप से दो आयामी आकृतियों की गहन जानकारी दी जाएगी - जो युक्लिडीय ज्यामिति में अध्ययन के प्रमुख अंग हैं और साथ ही हाई स्कूल में पढ़ाए जाने वाले ज्यामितीय पाठ्यक्रम का भी बड़ा हिस्सा हैं।	टर्टल लोगो गतिविधि
युनिट 2	आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन करना	ज्यामितीय सोच के वान हिले स्तरों पर आधारित यह युनिट तर्क-क्षमता को अगले स्तर पर ले जाती है। इस युनिट में दिए गए पाठों का ताना-बाना एक डिजिटल खेल के इर्दगिर्द बुना गया है, जो छात्रों को आकृतियों को सिर्फ वस्तु या प्रतीक के रूप में नहीं, बल्कि उनकी विशेषताओं और गुणों का विश्लेषण और उनके बारे में बात करने के लिए प्रोत्साहित करता है।	मिशन 1 और 2 - पुलिस क्वॉड खेल
युनिट 3	आकृतियों को वर्गीकृत और परिभाषित करना	इस युनिट के पाठ अलग-अलग आकृतियों के गुणों पर नज़र डालने के अलावा, छात्रों को एक कदम और आगे ले जा कर आकृतियों के वर्गों की जानकारी देंगे और साथ ही एक साथ सहयोग करके उनकी साझा परिभाषाएँ विकसित करने में भी सक्षम बनाएंगे।	मिशन 3 - पुलिस क्वॉड खेल
युनिट 4	गुण-आधारित तर्क-क्षमता	यह एक महत्वपूर्ण चरण हैं, जहाँ छात्र संबंधात्मक और निष्कर्षात्मक 'यदि-तो' तर्क-क्षमता की दुनिया में कदम रखेंगे। यहाँ वैकल्पिक परिभाषाओं और परिभाषाओं की आवश्यकता पर भी चर्चा की गई है। खेल का विस्तार इस युनिट तक है।	मिशन 4 - पुलिस क्वॉड खेल
युनिट 5	साक्ष्य की आवश्यकता को समझना	अंतिम युनिट में अनुमान लगाने, परीक्षण करने और अनौपचारिक तर्क-क्षमता गतिविधियों को शामिल किया गया है। छात्रों को तथ्यात्मक तर्क-क्षमता के आधार पर एक परिकल्पना तैयार करके उसकी पुष्टि करनी होगी और साथ ही यह भी समझना होगा कि इन पुष्टियों को 'साक्ष्य' क्यों नहीं माना जा सकता। उन्हें इसकी जानकारी मिलती है कि तथ्यात्मक तर्क-क्षमता गणित को समझने का एक महत्वपूर्ण तरीका है, इसमें त्रुटि हो सकती है और इसीलिए तर्कसंगत साक्ष्यों की ज़रूरत होती है।	जियोजेब्रा गतिविधि

## इकाई 1 : आकृति की अवधारणा

### अवलोकन

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र आकृति को बदलने और नहीं बदलने (उदाहरण के लिए, अभिविन्यास में परिवर्तन) वाले कारकों का अन्वेषण करके 'आकृति' की सशक्त समझ विकसित कर सकेंगे और साथ ही इसका कारण समझ सकेंगे। इस इकाई की मदद से छात्र इस अवधारणा को आत्मसात कर सकेंगे कि गणित में 'आकृति' गुणों के एक निश्चित समूह द्वारा परिभाषित की जाती है, दृष्टिगत दिखावट द्वारा नहीं।

इसके लिए, छात्रों को दो गतिविधियाँ पूरी करनी होंगी और उसके बाद पूरी कक्षा में इस पर परिचर्चा की जाएगी। पहली गतिविधि में, वे माचिस की तीलियों के साथ आकृतियाँ बनाएँगे और आकृतियों पर विभिन्न क्रियाओं के प्रभाव की पड़ताल करेंगे। दूसरी गतिविधि में, वे कंप्यूटर लैब में जा कर लॉगो टर्टल प्रोग्रामिंग का इस्तेमाल करके वर्ग बनाएँगे और वर्ग की एक कार्यशील परिभाषा विकसित करेंगे। इसके बाद पूरी कक्षा में होने वाली परिचर्चा में, छात्रों को शिक्षक द्वारा आयोजित परिचर्चा में हिस्सा ले कर अपने ज्ञान को पुख्ता करना होगा।

### अध्ययन का उद्देश्य

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र

- 'आकृति' की समझ विकसित कर सकेंगे और विभिन्न क्रियाओं, जैसे कि गति, घूर्णन, परावर्तन और विकृतिकरण का आकृति पर पड़ने वाले प्रभाव को समझ सकेंगे
- वर्गों और त्रिकोणों की पहचान कर सकेंगे और उदाहरणों और गैर-उदाहरणों की स्पष्ट रूप से पहचान कर सकेंगे
- 'वर्ग' और 'त्रिकोण' की कार्यशील परिभाषाएँ विकसित कर सकेंगे

### पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृति की बुनियादी समझ
- वर्गों और त्रिकोणों की बुनियादी (दृष्टिगत) पहचान

### पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

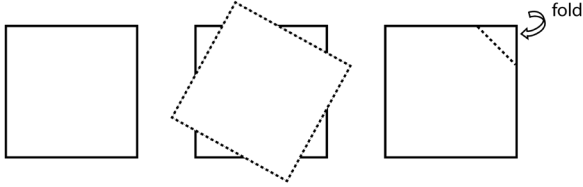
- लॉगो टर्टल प्रोग्रामिंग की बुनियादी क्रियाओं की जानकारी (केवल सरल कमांड - आगे, दाएँ, बाएँ और क्लीयर स्क्रीन की जानकारी होनी चाहिए)

### पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

पाठ	गतिविधि	गतिविधि का नाम	अवधि (अनुशंसित)	माध्यम
पाठ 1: आकृति क्या होती है	1.1	माचिस की तीलियों से बनी आकृतियों का अन्वेषण	35	स्वयं करें (स्व-अध्ययन)
	1.2	वर्ग बनाना	35	डिजिटल
	1.3	कक्षा परिचर्चा	20	कक्षा परिचर्चा
मूल्यांकन 1	1.4	मूल्यांकन : इकाई 1	35	वर्कशीट

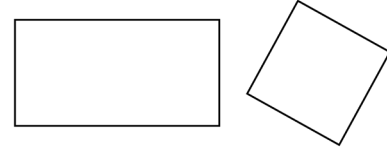
## कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (20 मिनट)

कक्षा परिचर्चा में, आप गतिविधि 1.1 और 1.2 से मिली सीखों को जोड़कर देखने और उन्हें समेकित करेंगे, ताकि छात्र आकृति की अवधारणा को समझने के साथ-साथ उन क्रियाओं को भी समझ सकें, जो किसी आकृति का रूप कायम रखते हैं या उसे बदलते हैं। परिचर्चाओं के माध्यम से, छात्र वर्ग की एक कार्यशील परिभाषा तैयार करेंगे। आपके द्वारा कक्षा कक्ष में आयोजित की जा सकने वाली कुछ गतिविधियों का उल्लेख नीचे किया गया है।



एक वर्गाकार कागज़ का उपयोग करके उसे रूपांतरित या विकृत करने का प्रयास करें और इस पर चर्चा करें कि इनमें से प्रत्येक मामले में आकृति का रूप बदल जाता है या फिर एक वर्ग बना रहता है।

बोर्ड पर एक आयत और एक घूमा हुआ वर्ग बनाकर छात्रों से पूछें कि क्या इन आरेखों को वर्ग कहा जा सकता है।



छात्रों से उनके उत्तर का स्पष्टीकरण देने या कारण बताने को कहें।

उनसे पूछें कि किस प्रकार के रूपांतरण आकृति के गुणों को बदलते हैं (जैसे तानना, विकृत करना आदि) और कौन-से रूपांतरण उसके गुणों को नहीं बदलते (जैसे घूर्णन, परावर्तन, गति)। उन्हें आकृति के इन रूपांतरणों को समझकर खुद को यह विश्वास दिलाने का मौका दें कि उनमें से कौन-से रूपांतरण गुणों को कायम रखते हैं और कौन-से नहीं। उनकी यह समझने में सहायता करें कि आकृतियाँ उनके गुणों द्वारा परिभाषित होती हैं और जब तक कि उनके गुणों में कोई परिवर्तन नहीं होता, तब तक आकृति में भी कोई परिवर्तन नहीं होता।

छात्रों से गुणों के आधार पर अपने शब्दों में वर्ग का वर्णन करने के लिए कहें और एक परिभाषा विकसित करने में उनकी सहायता करेंगे। यही अभ्यास त्रिकोणों के लिए भी किया जा सकता है।

## स्मरणीय तथ्य

लोगो टर्टल गतिविधि का उपयोग बाहर भी किया जा सकता है, जहाँ कुछ छात्र आदेश देंगे और अन्य छात्र आदेशों का पालन करेंगे (ठीक कंप्यूटर पर टर्टल की तरह) और अपनी राह बनाएँगे।

हो सकता है कुछ छात्र अभी भी आकृतियों को उनके रंगरूप के आधार पर वर्णन कर रहे हों। ऐसे मामलों में इस बात पर जोर दें कि आकृति का रूपांतरण होने पर गुणों का क्या होता है। छात्रों के मन में यह भ्रान्ति हो सकती है कि जब वर्ग को घुमाया जाता है, तो वह वर्ग नहीं रह जाता। छात्रों की यह समझने में मदद करें कि आकृति अपने रंगरूप से नहीं, बल्कि गुणों से परिभाषित होती है। इस तथ्य को साबित करने के लिए आप वास्तविक जीवन के कुछ उदाहरण दे सकते हैं।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या छात्रों ने परिचर्चा में हिस्सा लिया? कुछ उदाहरण दें

क्या कुछ ऐसे छात्र भी हैं, जिन्हें आकृति की अवधारणा समझ में नहीं आई है? आपको ऐसा क्यों लगता है?

क्या आप छात्रों द्वारा की गई कुछ ज्यामितीय त्रुटियों की पहचान कर सके? क्या आप छात्रों को उनका समाधान सुझा सके और कैसे? कम-से-कम एक का वर्णन करें।

परिचर्चा के दौरान वर्ग की क्या कार्यशील परिभाषाएँ विकसित की गईं? कम-से-कम 3 को नोट करें।

### मनन

क्या छात्र समझ सके कि किस चीज़ पर चर्चा की जा रही है? आप दावे के साथ ऐसा कैसे कह सकते हैं?

कौन-सी समस्याएँ आईं? आपने उन्हें सुलझाने के लिए क्या किया?

क्या परिचर्चा में सभी छात्रों ने हिस्सा लिया? परिचर्चाओं में सभी छात्रों को शामिल करने के लिए आपने क्या किया?

क्या आप कक्षा में पढ़ाने के दौरान हुई कुछ रोचक बातें बताना चाहेंगे?

## इकाई 2 : आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन करना

### अवलोकन

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र दृष्टिगत स्वरूप के बजाय गुणों के आधार पर आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन कर सकेंगे। वे आकृतियों के बारे में बातें करते समय उचित गणितीय शब्दों और शब्दावली को समझकर उनका उपयोग करने लगेंगे। यह इकाई छात्रों में बोधपरक तर्क शक्ति की आरंभिक अवधारणा विकसित करने में भी सहायता करेगी।

इस इकाई के अधिकांश पाठ एक खेल परिवेश पर आधारित हैं। इस इकाई की शुरुआत एक संक्षिप्त स्वयं करें छँटाई गतिविधि और कुछ उपयोगी शब्दों और गुणों के सारांश से होती है। इसके बाद, छात्र 3-4 सत्रों तक पुलिस क्वॉड खेल के पहले दो मिशन खेलेंगे और उन सत्रों के बीच-बीच में पूरी कक्षा के लिए परिचर्चाएँ आयोजित की जाएँगी। पहले मिशन से छात्रों को आकृतियों के महत्वपूर्ण गुणों का विश्लेषण करने और उन्हें समझने में मदद मिलेगी, जबकि दूसरे मिशन से उन्हें यह पता चलेगा कि वे इन गुणों का खेल की रणनीति बनाने में कैसे इस्तेमाल कर सकते हैं।

### अध्ययन का उद्देश्य

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र

- आकृतियों पर विश्लेषणात्मक ढंग से दृष्टि डाल सकेंगे, यानी वे उन्हें 'दिखावट' के आधार पर नहीं, बल्कि उनका निर्माण करने वाले हिस्सों और गुणों के आधार पर देखेंगे - और इसी क्रम में, दो-आयामी आकृतियों के बारे में विचार करने के निचले (यानी कम जटिल) स्तर से ऊँचे (यानी अधिक जटिल) स्तर पर जाएँगे।
- आकृतियों की विशेषताओं और गुणों से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण शब्दों और अवधारणाओं को समझेंगे (भुजाओं और कोणों का अर्थ, अलग-अलग प्रकार के कोण, समानांतर रेखाओं की अवधारणा आदि) और उनका ज़रूरत के अनुसार उचित और सटीक ढंग से इस्तेमाल करेंगे।
- बोधपरक तर्क शक्ति का आरंभिक ज्ञान अर्जित करेंगे - जिसमें तथ्यों के आधार पर किसी निश्चित नतीजे पर पहुँचने का विचार भी शामिल होगा।

### पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृति की अवधारणा तथा इस विचार की समझ कि किसी आकृति के गुण होते हैं।
- दो-आयामी आकृतियों के कुछ बुनियादी गुणों की समझ। उदाहरण के लिए:
  - सीधी और वक्र रेखा/भुजा के बीच फ़र्क करने का ज्ञान
  - किसी आकृति की भुजाओं और शिरोबिंदुओं की संख्या ज्ञात करने और उन्हें पहचानने का ज्ञान
  - 'कोण' के अर्थ का ज्ञान
  - सम, न्यून, अधिक और बृहत् कोणों की समझ और उन्हें पहचानने का ज्ञान
  - समानांतर रेखाओं की अवधारणा की समझ और किसी आकृति की समानांतर भुजाओं के युग्मों की पहचान करने का ज्ञान

### पूर्व अपेक्षित आई. सी. टी. ज्ञान

- ड्रैग, ड्रॉप और इंटरफ़ेस का इस्तेमाल करने से जुड़ी कार्यविधियों की जानकारी

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

पाठ	गतिविधि	गतिविधि का नाम	अनुशंसित अवधि (मिनट)	माध्यम
पाठ 2: आकृतियों का विश्लेषण	2.1	आकृतियों की छँटाई	35	स्वयं करें
	2.2	पुलिस क्वॉड - मिशन 1	70	डिजिटल
	2.3	कक्षा परिचर्चा	40	कक्षा परिचर्चा
पाठ 3: आकृतियों का विश्लेषण	2.4	पुलिस क्वॉड - मिशन 2	70	डिजिटल
	2.5	कक्षा परिचर्चा	20	कक्षा परिचर्चा
मूल्यांकन 2	2.6	मूल्यांकन: इकाई 2	35	वर्कशीट

## पाठ 2

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (40 मिनट)

कक्षा परिचर्चा में, आप

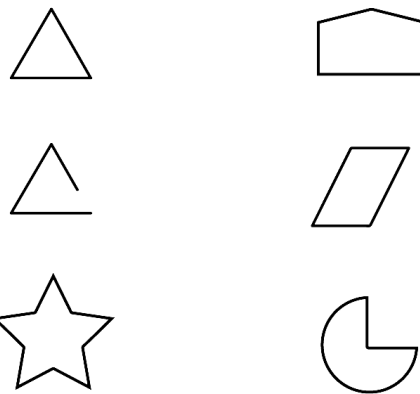
- छात्रों को खेल से मिली सीखों का सार बताएँगे
- खेल के अगले सत्र के लिए अधिक प्रभावशाली रणनीतियाँ विकसित करने में उनकी सहायता करेंगे

छात्रों के मन में बैठी वैकल्पिक अवधारणाओं को समझा और उनका समाधान किया जा सकता है।

- परिचर्चा से पहले छात्रों द्वारा किए गए कार्यों को देखकर आप छात्रों की विचारधारा को समझ सकते हैं और परिचर्चा को आगे बढ़ाने के संबंध में मार्गदर्शन प्राप्त कर सकते हैं।

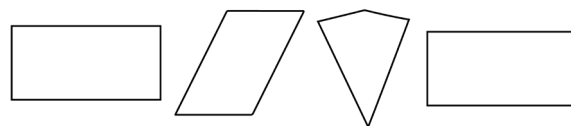
आकृतियों का उनके गुणों के आधार पर वर्णन करने में छात्रों की मदद के लिए नीचे कुछ अनुशंसित कार्यों का सुझाव दिया गया है। आप छात्रों को ये कार्य समूहों में पूरा करने और सामूहिक चर्चाओं में हिस्सा लेने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं।

आप बोर्ड पर नीचे दी गई आकृतियाँ बनाकर उन्हें इन आकृतियों का वर्णन करने के लिए कह सकते हैं।



छात्रों को आकृतियों और उनके गुणों के बारे में बात करने के और अवसर देने के लिए, छात्रों से आकृतियों के बीच समानताओं और विषमताओं की पहचान करने को कहें।

- निम्नलिखित आकृतियाँ (तथा कुछ और युग्म) बनाएँ और छात्रों से प्रत्येक युग्म के बीच समानताएँ और विषमताएँ ढूँढने के लिए कहें।
- यह अभ्यास करते समय, कृपया छात्रों से हर संभावित विशेषता पर गौर करने के लिए कहें।





निम्नलिखित कार्य आकृतियों के बारे में अधिक चर्चा करने तथा आकृतियों के गुणों के आधार पर वर्गीकरण की अवधारणा को समझने में उपयोगी साबित हो सकता है:

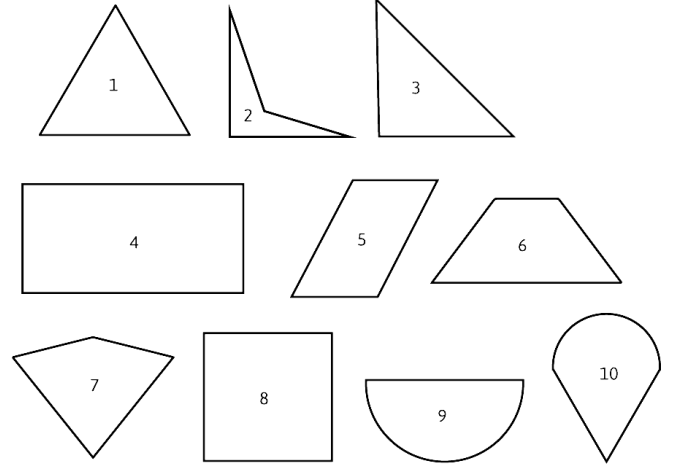
- बोर्ड पर आकृतियों का एक समूह बनाएँ। दाईं ओर उदाहरण स्वरूप दी गई आकृतियों को देखें
- छात्रों से विभिन्न मापदंडों के आधार पर इन आकृतियों को वर्गीकृत करने के लिए कहें (उन्होंने यह गतिविधि अपनी वर्कबुक में की है)। इन मापदंडों के कुछ उदाहरणों में 'ऐसी आकृतियाँ जिनकी भुजाएँ वक्र होती हैं और वे आकृतियाँ जिनकी वक्र भुजाएँ नहीं होतीं' या 'ऐसी आकृतियाँ, जिनमें कम-से-कम एक समकोण होता है और वे आकृतियाँ जिनमें एक भी समकोण नहीं होता' आदि शामिल हैं।

आप इस अभ्यास के लिए आकृतियों का कोई दूसरा समूह भी चुन सकते हैं।

पूरी कक्षा के छात्रों के साथ मापदंडों पर चर्चा करें। कुछ प्रश्न जिन पर चर्चा की जा सकती है, इस प्रकार हैं:

- आपके द्वारा गठित समूह के सभी सदस्यों द्वारा कौन-कौन से गुण साझा किए गए हैं?
- क्या आप उन आकृतियों के समूह के लिए कोई नाम सोच सकते हैं, जिन्हें आपने वर्गीकरण द्वारा तैयार किया है?

कम-से-कम', 'बिल्कुल' आदि परिमाण वाचक शब्दों को समझने के लिए, इस पर चर्चा करें कि किन आकृतियों में कम-से-कम एक समकोण है, बराबर लंबाई वाली भुजाओं का कम-से-कम एक युग्म है और इसी तरह की अन्य चर्चाएँ करें। न्यून, अधिक, सम और बृहत् कोण जैसे शब्दों को परिभाषित करने में छात्रों की सहायता करें।



### स्मरणीय तथ्य

- छात्रों को इन गुणों पर चर्चा करने का अवसर दें और आकृतियों को इन गुणों के आधार पर छाँटें।
- छात्रों के मन में कुछ वैकल्पिक धारणाएँ हो सकती हैं, जैसे कि त्रिकोण हमेशा 'सीधा होता है' या समकोण की एक भुजा का क्षैतिज होना और दूसरी का लंबवत होना अनिवार्य है आदि।
- इन धारणाओं को चुनौती देने वाली उचित आकृतियाँ बनाकर इनका समाधान करें। उदाहरण के लिए, अपनी आकृतियाँ बनाते समय आप एक बहुत छोटी भुजा वाला त्रिकोण शामिल कर सकते हैं, या फिर एक घूमा हुआ समकोणीय त्रिकोण बना सकते हैं।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

छात्रों ने कक्षा में खेल की किस प्रकार चर्चा की? कुछ उदाहरण दें	
छँटाई की गतिविधि के दौरान छात्रों ने किन अलग-अलग मापदंडों का उल्लेख किया? कम-से-कम 4 नोट करें।	
छात्रों को कौन-कौन से गुण समझ में आए। कम-से-कम 3 लिखें।	
आपको कौन-कौन सी आम गलतियाँ नज़र आईं? आपने उनका समाधान कैसे किया?	

### आत्मचिंतन

सामूहिक गतिविधि में, क्या छात्रों ने उन्हें दिए गए कार्य पर चर्चा की? कुछ परिचर्चाएँ लिखें।	
क्या आपके लिए सामूहिक गतिविधि आयोजित करना आसान था? आपके सामने आई कुछ चुनौतियों के बारे में लिखें।	
आपने छात्रों के खेल खेलने के अनुभव का कक्षा कक्ष में हुई परिचर्चा में कैसे उपयोग किया?	

## पाठ 3

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (20 मिनट)

आप छात्रों से निम्न प्रश्न पूछकर उन्हें अपनी खेल रणनीतियों का वर्णन करने के लिए कह सकते हैं:

- उन्होंने प्रासंगिक प्रश्न कैसे निर्धारित किए
- कंप्यूटर से मिले जवाबों के आधार पर वे आकृतियों को कैसे बाहर निकालते गए।
- कंप्यूटर से उन्हें - 'मुझे समझ नहीं आ रहा है!' जवाब क्यों मिल रहा था। ऐसे प्रश्नों में गणितीय त्रुटि की पहचान करने में उनकी सहायता करें।

प्रश्न तैयार करने के लिए शुद्ध और सटीक भाषा चुनने में उनकी सहायता करें और उन रणनीतियों पर चर्चा करें, जिसकी सहायता से वे प्रश्नों की न्यूनतम संख्या का उपयोग करके अपराधी की पहचान कर सकेंगे।

छात्रों को उन विभिन्न रणनीतियों के बारे में बात करने के लिए प्रोत्साहित करें, जिसका उपयोग उन्होंने खेल खेलने के दौरान किया था और फिर इनमें से प्रत्येक के फ़ायदे और नुकसान पर चर्चा करें

संकेत: प्रश्नों की न्यूनतम संख्या का उपयोग करके अपराधी की पहचान करने के लिए, छात्रों को एक ऐसा प्रश्न पूछना चाहिए, जो आकृतियों के समूह को मोटे तौर पर दो बराबर समूहों में बाँटता हो - यानी एक समूह ऐसी आकृतियों का जिनमें उल्लिखित गुण हैं और दूसरा समूह उन आकृतियों का जिनमें उल्लिखित गुण नहीं हैं। इसके आगे के प्रश्न भी इसी सिद्धांत पर आधारित होंगे।

ध्यान दें कि अब वे आकृतियों के समूह/वर्ग के गुणों पर गौर कर रहे हैं - जब भी कोई प्रश्न पूछा जाता है और उसका उत्तर हाँ या नहीं में दिया जाता है, तो आकृतियों का एक समूह/वर्ग बाहर निकाल दिया जाता है और दूसरा वर्ग रह जाता है। कक्षा कक्ष में होने वाली इस परिचर्चा में छात्र खेल खेलने के संबंध में अपना-अपना अनुभव साझा करेंगे।

कक्षा में मिशन 2 खेलने के लिए बोर्ड पर आकृतियों का एक समूह बनाएँ। किसी एक आकृति को अपराधी मानकर छात्रों से कहें कि वे आपसे ऐसे प्रश्न पूछें, जिनकी सहायता से आप अपराधी की पहचान कर सकें। 'हाँ/नहीं/मुझे समझ में नहीं आया' के रूप में उत्तर दें और छात्रों को उस अपराधी की पहचान करने दें, जिसके बारे में आपने सोचा था। आपके लिए आकृतियों का एक समूह नीचे बनाया गया है।

- और आकृतियों का उपयोग करके आपको प्रासंगिक लगने वाले शब्दों, जैसे समकोण, समानांतर रेखाओं, बृहत् कोण, आसन्न भुजाओं आदि पर चर्चा करें।
- छात्रों से पूछें कि 'कम-से-कम' शब्द का क्या अर्थ है। साथ ही, 'कम-से-कम', 'इससे अधिक', 'इससे कम', 'बिल्कुल' आदि गुणवाचक शब्दों की प्रासंगिकता और महत्व पर चर्चा करें।
- 'हाँ' जवाब वाले प्रश्नों तथा 'नहीं' जवाब वाले प्रश्नों पर चर्चा करें। उस निर्णय की व्याख्या करें, जिसे वे कंप्यूटर से 'नहीं' जवाब मिलने पर देखते हैं। खासतौर पर 'क्या इसमें कम-से-कम एक समकोण है?' - यदि कंप्यूटर का जवाब 'हाँ' होता, तब वे क्या करते? किन आकृतियों को बाहर निकाला जा सकता है? कंप्यूटर का जवाब 'नहीं' होने पर उनकी क्या प्रतिक्रिया होती? अभी कौन-सी आकृतियाँ बाहर निकाली जाएँगी? जैसे प्रश्नों पर चर्चा करें।

चर्चा के लिए बोर्ड पर बनाई जाने वाली आकृतियों के समूह का एक उदाहरण



## स्मरणीय तथ्य

- छात्रों के मन में एक गलत धारणा हो सकती है कि समानांतर रेखाओं की लंबाई बराबर होनी चाहिए। इसका समाधान करने के लिए, दो अलग-अलग लंबाइयों वाली समानांतर भुजाएँ बनाएँ और उनसे पूछें कि क्या वे समानांतर हैं? साथ ही, अलग-अलग अभिविन्यास में समानांतर रेखाएँ बनाएँ। इसी तरह की अन्य गलत धारणाओं की पहचान करें और उनका समाधान करें।
- छात्रों को अलग-अलग आकृतियों के गुणों के बजाय आकृतियों के वर्ग के साझा गुणों पर नज़र डालने के लिए प्रोत्साहित करें। उनकी यह देखने में मदद करें कि आकृतियों के वर्गों की पहचान उस वर्ग के सभी सदस्यों के साझा गुणों से की जाती है।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

छात्रों द्वारा खेल खेलने के दौरान इस्तेमाल की गई कुछ रणनीतियों का उल्लेख करें, जिसे उन्होंने कक्षा कक्ष में साझा किया था।

छात्रों ने इस खेल से कौन-सी नई अवधारणाओं को सीखा?

क्या उन्हें अंदाज़ लगाने और सोच-समझकर रणनीति बनाने के बीच फ़र्क समझ में आया? कारण बताएँ।

यह खेल खेलते समय छात्रों के सामने आई कुछ कठिनाइयों का उल्लेख करें।

### आत्मचिंतन

आपको क्यों लगता है कि खेल का मिशन 2 खेलने और कक्षा कक्ष में आयोजित की जाने वाली परिचर्चा में भाग लेने के बाद छात्रों में बोधपरक चिंतन की योग्यता विकसित होगी?

बोधपरक तर्क शक्ति के इस कौशल से छात्रों को ज्यामिति को और भी अच्छी तरह समझने में कैसे सहायता मिलेगी?

क्या आपको लगता है कि छात्र उनकी अपनी गलतियों से सीख रहे हैं? उदाहरण दें।

## इकाई 3: आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करना

### अवलोकन

इस युनिट में, छात्र अलग-अलग आकृतियों और उनके गुणों के वर्णन के परे जा कर आकृतियों के किसी वर्ग द्वारा के सामान्य गुणों पर गौर करना सीखेंगे। इस तरह उनमें आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करने की योग्यता विकसित होगी। वे संक्षिप्त और सटीक परिभाषाओं की आवश्यकता को भी समझ सकेंगे।

इसके लिए, छात्रों को गतिविधियों की एक शृंखला पूरी करनी होगी। पहली गतिविधि में वे एक खेल खेलेंगे, जिसमें उन्हें आकृतियों के एक समूह के आम गुण (गुणों) तथा उदाहरणों तथा गैर-उदाहरणों के समूहों की पहचान करनी होगी। दूसरी गतिविधि में, कक्षा को सुकराती संभाषण की पद्धति का पालन करते हुए चतुर्भुज की एक साझा परिभाषा विकसित करनी होगी और साथ ही गणित में संक्षिप्त परिभाषाओं की आवश्यकता को समझना होगा। फिर वे विशिष्ट चतुर्भुजों, जैसे कि समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग और समचतुर्भुज को समझकर उनकी कार्यशील परिभाषाएँ विकसित करेंगे। इसके बाद दो और गतिविधियाँ आयोजित की जाएँगी, जिसमें उन्हें टर्टल ब्लॉक्स का इस्तेमाल करके तथा डॉट पेपर पर विशिष्ट चतुर्भुज बनाएँगे। इसके अलावा वे उन्हें बनाने के लिए इस्तेमाल किए गए विचारों के सहारे विशिष्ट चतुर्भुजों की कार्यशील परिभाषाएँ तैयार करेंगे। इस युनिट की अंतिम गतिविधि में, छात्रों को विशिष्ट चतुर्भुजों के इन वर्गों में से प्रत्येक के लिए गुण सूचियाँ तैयार करनी होंगी। इन गतिविधियों के बीच-बीच में पूरी कक्षा के साथ कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित की जाएँगी, जहाँ शिक्षक छात्रों का ध्यान मुख्य बिंदुओं की ओर आकर्षित करेंगे।

### अध्ययन का उद्देश्य

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र

- आकृतियों को उनके आम गुणों के आधार पर वर्गीकृत कर सकेंगे
- यह समझ सकेंगे कि 'आकृतियों का वर्ग' आम गुणों के एक समूह द्वारा परिभाषित होता है
- किसी आकृति के वर्ग के साझा आम गुणों की तलाश कर सकेंगे और उनकी पहचान कर सकेंगे और फिर उन गुणों का इस्तेमाल करके आकृतियों के वर्ग की परिभाषाएँ तैयार कर सकेंगे
- चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग की साझा (कार्यशील) परिभाषाएँ विकसित कर सकेंगे और प्रत्येक के उदाहरण और गैर-उदाहरण दे सकेंगे।
- संक्षिप्त परिभाषाओं की आवश्यकता को समझ सकेंगे

### पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृतियों के गुणों का बुनियादी ज्ञान, जैसे 'सभी भुजाएँ बराबर हैं' और 'इसमें एक समकोण है' आदि.
- आकृति का उसके गुणों के आधार पर वर्णन करने की योग्यता

### पूर्व अपेक्षित आई. सी. टी. ज्ञान

- लोगो टर्टल प्रोग्रामिंग की बुनियादी क्रियाओं का ज्ञान (केवल सरल कमांड - जैसे कि आगे, दाएँ, बाएँ और क्लीयर स्क्रीन)
- ड्रैग, ड्रॉप तथा इंटरफ़ेस का इस्तेमाल करने की कार्यविधियों का ज्ञान

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

पाठ	गतिविधि	गतिविधि का नाम	अनुशंसित अवधि (मिनट)	माध्यम
पाठ 4: आकृतियों का वर्गीकरण	3.1	पुलिस क्वॉड मिशन - 3	35	डिजिटल
	3.2	आकृतियों को वर्गीकृत और परिभाषित करना - कक्षा परिचर्चा	20	कक्षा परिचर्चा
पाठ 5: आकृतियों को परिभाषित करना	3.3	चतुर्भुज क्या होता है	45	स्वयं करें
पाठ 6: विशिष्ट चतुर्भुजों को परिभाषित करना	3.4	आयत बनाना	30	डिजिटल
	3.5	विशिष्ट चतुर्भुजों का अन्वेषण करना	30	स्वयं करें
	3.6	विशिष्ट चतुर्भुजों को परिभाषित करना	30	कक्षा परिचर्चा
पाठ 7: विशिष्ट चतुर्भुजों की परिभाषा है	3.7	गुण सूचियाँ बनाना	45	स्वयं करें
मूल्यांकन 3	3.8	मूल्यांकन - युनिट 3	35	वर्कशीट

## पाठ 4

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (20 मिनट)

इस गतिविधि का उद्देश्य खेल से मिले ज्ञान को पुख्ता करना और छात्रों से उन गुणों की तलाश करने का अधिक अभ्यास करवाना है, जो आकृतियों के किसी वर्ग के लिए एक समान होते हैं और जो उन्हें आकृतियों के किसी दूसरे वर्ग से अलग बनाते हैं। छात्र किसी आकृतियों के वर्ग के इन साझा गुणों को समझकर आकृति के वर्गों की परिभाषा तैयार करेंगे।

इस कक्षा में, आप इस तरह के प्रश्नों पर चर्चा कर सकते हैं:

- किसी आकृति को कौन परिभाषित करता है?
- आकृतियों का वर्ग क्या होता है? हम कैसे तय करते हैं कि कोई आकृति किसी खास वर्ग से संबंधित होगी या नहीं?

आप कक्षा में एक लघु गतिविधि भी पूरी कर सकते हैं: बोर्ड पर आकृतियों के दो समूह बनाएँ। छात्रों से किसी एक समूह के सभी सदस्यों के ऐसे आम गुण की पहचान करने के लिए कहें, जो दूसरे समूह के किसी भी सदस्य में नहीं हैं। कृपया छात्रों का ध्यान आकृतियों के समूह के आम गुणों की ओर ले जाएँ।

आप बोर्ड पर आकृतियों का एक दूसरा समूह बनाकर भी छात्रों से उनके सभी आम गुणों की पहचान करने के लिए कह सकते हैं। छात्रों से एक कदम आगे बढ़कर आकृतियों के समूह का एक नाम सुझाने के लिए कहा जा सकता है। कुछ अन्य आकृतियाँ बनाएँ और छात्रों से पूछें कि वे उस वर्ग का हिस्सा हैं या नहीं।

छात्रों को कुछ खास गुणों वाली उनकी अपनी आकृतियाँ बनाने के लिए कहें, जैसे 'एक ऐसी आकृति, जिसमें कम-से-कम एक समकोण हो' या 'एक ऐसी आकृति, जिसमें समानांतर भुजाओं का एक युग्म हो' आदि। ध्यान दें कि उनके द्वारा बनाई जाने वाली सभी आकृतियों में वह गुण मौजूद हो। इस पर ध्यान दें कि एक निश्चित गुण को स्थिर रखते हुए वे अपनी आकृतियों के समूह में क्या-क्या बदलाव लाते हैं।

### स्मरणीय तथ्य

छात्रों की यह समझने में मदद करें कि:

आकृति वर्ग उनके आम गुणों द्वारा परिभाषित किए जाते हैं।

किसी खास वर्ग से संबंधित सभी आकृतियों के कुछ गुण समान होते हैं।

जिन आकृतियों में वह गुण नहीं होता, वे उस वर्ग से संबंधित नहीं होते। उदाहरण के लिए, ऐसी सभी आकृतियाँ, 1) जो चारों तरफ से बंद हैं और 4 सीधी भुजाओं से मिलकर बनी हैं 2) जिनकी सभी भुजाएँ बराबर हैं 3) जिनके सभी कोण समकोण हैं और जो वर्ग की श्रेणी में आते हैं।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

इस कक्षा परिचर्चा में छात्रों ने 'आकृतियों के वर्ग' का क्या अर्थ समझा?

आपको क्यों लगता है कि खेल का मिशन 3 खेलने से छात्रों को आकृतियों के वर्गों को समझने में मदद मिलेगी?

क्या छात्र आकृतियों का वर्ग निर्धारित करते समय आकृति की सभी विशेषताओं, जैसे कि समानांतर भुजाओं, बराबर भुजाओं, कोण के गुणों आदि पर विचार कर रहे थे? आप कैसे कह सकते हैं?

क्या आपको लगता है कि छात्रों ने आकृतियों पर विश्लेषणात्मक दृष्टि डालनी शुरू कर दी है?

## आत्मचिंतन

आकृतियों के वर्गों के विचार पर चर्चा करते समय आपको कौन-कौन सी चुनौतियों का सामना करना पड़ा?

आपको क्यों लगता है कि छात्रों की गलतियों का इस्तेमाल कक्षा कक्ष में पढ़ाने के साधन के रूप में किया जा सकता है?

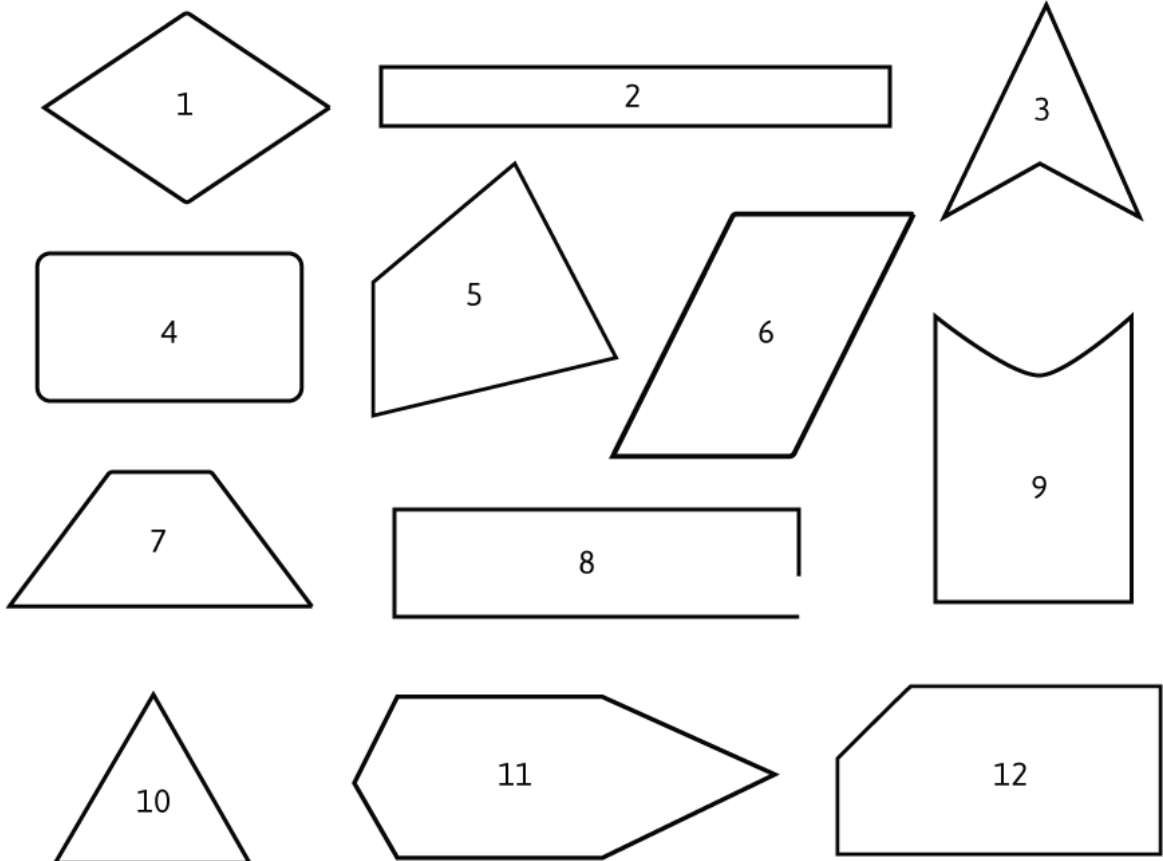
## पाठ 5

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

इस कक्षा कक्ष परिचर्चा में आपको गतिविधि 3.1 और 3.2 से मिली सीखों का औचित्य समझाकर और उन्हें पुख्ता करना होगा, ताकि छात्र को आकृतियों के विचार को समझ सकें और चतुर्भुज को एक वर्ग के रूप में समझ सकें।

यह कक्षा कक्ष परिचर्चा लायनेल परेरा-मेंडोज़ा, एन.सी.टी.एम. के लेख पर आधारित है। यह लेख गणित में परिभाषाओं की भूमिका की समझ विकसित करने के लिए एक गतिविधि के रूप में लिखा गया था।

**संदर्भ:** लायनेल परेरा-मेंडोज़ा (1993)। चतुर्भुज क्या होता है? नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथेमेटिक्स, दि मैथेमेटिक्स टीचर, खंड. 6, क्रमांक. 9 (दिसंबर 1993), पृष्ठ 774-776.





छात्रों से पहले अकेले-अकेले और बाद में समूहों में काम करके उपर्युक्त आकृतियों को 'चतुर्भुज है' और 'चतुर्भुज नहीं' के रूप में वर्गीकृत करने के लिए कहें।

चर्चा के दौरान, आप अपनी खुद की आकृतियाँ जोड़ सकते हैं। उनके साथ निम्नलिखित बिंदुओं पर चर्चा करें:

- उन्होंने कुछ आकृतियों को 'चतुर्भुज है', जबकि कुछ को 'चतुर्भुज नहीं' के रूप में क्यों वर्गीकृत किया?
- छात्रों से उनके उत्तरों का स्पष्टीकरण देने को कहें।
- छात्रों से चतुर्भुज की परिभाषा बताने को कहें।

चतुर्भुज की सटीक परिभाषा विकसित करने के लिए, कक्षा कक्ष में एक परिचर्चा आयोजित करें। छात्रों द्वारा प्रस्तावित अशुद्ध परिभाषाओं को काटने वाले उदाहरण पेश करें। उदाहरण के लिए, जब छात्र चतुर्भुज को एक 4 भुजाओं वाली आकृति के रूप में परिभाषित करें, तो आप चार रेखाओं से एक मुक्त आकृति बनाकर छात्रों से पूछें कि वह उन्हें एक चतुर्भुज लगता है या नहीं।

यदि वे कहते हैं कि चतुर्भुज की चार भुजाएँ होनी चाहिए और वह चारों तरफ से बंद आकृति होती है, तो एक ऐसी आकृति बनाएँ, जिसकी एक भुजा वक्र हो, और इसी तरह की अन्य आकृतियाँ बनाते जाएँ।



उनकी यह देखने में भी सहायता करें कि चतुर्भुज के सभी 4 शिरोबिंदु एक ही समतल पर होते हैं।

सभी चतुर्भुजों के आम गुणों की सूची पर चर्चा करें। आप चाहें तो आप किसी त्रिकोण आकृतियों के वर्ग पर भी चर्चा कर सकते हैं।

छात्रों से वह वर्कशीट दोबारा देखने को कहें, जिस पर उन्होंने काम किया था और उनसे कहें कि क्या वे अपनी पहले दी गई प्रतिक्रियाओं में कोई फेरबदल करना चाहते हैं। उनसे अपनी प्रतिक्रिया में फेरबदल के कारण बताने को कहें।

### स्मरणीय तथ्य

छात्रों से चतुर्भुज की एक सटीक परिभाषा तैयार करने को कहें। परिभाषा में किसी वर्ग के सभी सदस्य शामिल होने चाहिए और ऐसे सदस्य नहीं होने चाहिए, जो उस वर्ग से संबंधित न हो। चतुर्भुज की परिभाषा इस प्रकार होगी:

एक चतुर्भुज -

- 1) एक चारों तरफ से बंद आकृति होती है
- 2) जिसकी 4 सीधी भुजाएँ होती हैं
- 3) जिसके सभी शिरोबिंदु एक ही समतल पर होते हैं

आप उनसे प्रश्न पूछ सकते हैं, जैसे कि क्या वर्ग एक चतुर्भुज होता है? कारण बताएँ।

क्या एक समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज होता है? आदि।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

पहली बार वर्कशीट पूरी करते समय, छात्रों ने कौन-कौन सी गलतियाँ कीं? 3 उदाहरण दें।	
क्या छात्र सटीक परिभाषाओं का महत्व समझ सके?	
छात्रों ने अंत में चतुर्भुज की क्या परिभाषा विकसित की?	
'आकृतियों के वर्ग' की अवधारणा से छात्रों ने क्या समझा?	

### आत्मचिंतन

चतुर्भुजों की परिभाषाओं पर बातचीत करते समय आपको हुए अनुभव का वर्णन करें।	
आपके अनुसार उदाहरणों के साथ गैर-उदाहरणों की मौजूदगी (वर्कशीट में) कितनी लाभप्रद थी?	
क्या आपको लगता है कि यह खेल कक्षा को बेहतर ढंग से आयोजित करने में सहायता कर रहा है? कैसे?	
आपने छात्रों द्वारा मिशन 3 से मिली सीखों को इस कक्षा कक्ष परिचर्चा से कैसे जोड़ा?	

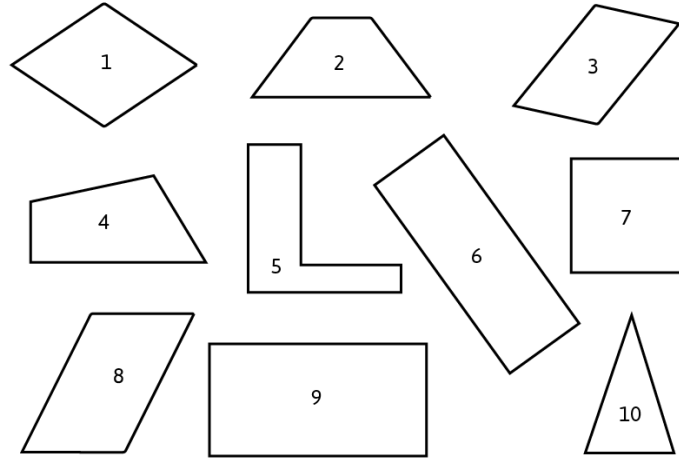
## पाठ 6

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (30 मिनट)

इस कक्षा कक्ष परिचर्चा में आपको गतिविधि 3.1 और 3.2 से मिली सीखों का औचित्य समझाकर और उन्हें पुख्ता करना होगा, ताकि छात्र को आकृतियों के विचार को समझ सकें और चतुर्भुज को एक वर्ग के रूप में समझ सकें।

यह कक्षा कक्ष परिचर्चा लायनेल परेरा-मेंडोज़ा, एन.सी.टी.एम. के लेख पर आधारित है। यह लेख गणित में परिभाषाओं की भूमिका की समझ विकसित करने के लिए एक गतिविधि के रूप में लिखा गया था।

**संदर्भ:** लायनेल परेरा-मेंडोज़ा (1993)। चतुर्भुज क्या होता है? नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथेमेटिक्स, दि मैथेमेटिक्स टीचर, खंड. 6, क्रमांक. 9 (दिसंबर 1993), पृष्ठ 774-776.



उनसे समानांतर चतुर्भुज की उनकी अपनी परिभाषा तैयार करने के लिए कहें। आप इस समूह में कुछ और आकृतियाँ शामिल कर सकते हैं, या फिर आपकी अपनी आकृतियाँ बना सकते हैं। विरोधी उदाहरण दे कर उनकी परिभाषाओं को परिशोधित करें, जैसा कि चतुर्भुजों के उदाहरण में सुझाया गया है।

अन्य विशिष्ट चतुर्भुजों के लिए आप इससे मिलती-जुलती गतिविधियाँ पूरी कर सकते हैं और छात्रों से आयतों, समचतुर्भुजों और वर्गों की उनकी अपनी परिभाषाएँ तैयार करने के लिए कह सकते हैं।

### स्मरणीय तथ्य

विशिष्ट चतुर्भुजों की सटीक परिभाषा तैयार करने में छात्रों की मदद करने के लिए विभिन्न प्रकार के उदाहरण दें। कृपया ध्यान दें कि छात्र सिर्फ चतुर्भुज की बनावट पर विचार कर रहे हैं या फिर उसके गुणों पर भी गौर कर रहे हैं।

आप निम्न बिंदुओं को समझने में छात्रों की मदद करेंगे:

- यह कि परिभाषाएँ आकृतियों के वर्गों के आम गुणों के आधार पर तैयार की जाती हैं।
- यह कि आकृतियों के वर्गों की एक साझा समझ विकसित करने और आकृति के इन वर्गों के बारे में तर्क-वितर्क करने की दृष्टि से परिभाषाएँ आवश्यक होती हैं।
- हम कक्षा में इस्तेमाल करने के लिए वर्गों, आयतों, समांतर चतुर्भुजों और समचतुर्भुजों की एक साझा (कार्यशील) परिभाषाएँ विकसित करेंगे।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

छात्रों को लोगो में आयत बनाते समय कौन-कौन सी कठिनाइयों से जूझना पड़ा। कुछ का वर्णन करें।	
उल्लिखित कार्य पूरे करने के बाद, समांतर चतुर्भुजों की अंतिम परिभाषा की जानकारी देने से पहले ऐसी दो परिभाषाएँ लिखें, जिन्हें छात्रों ने तैयार किया है।	
क्या आयतों और वर्गों को ले कर छात्रों के मन में कोई गलत अवधारणा थी? यदि हाँ तो किन्हीं दो का उल्लेख करें।	
क्या समांतर चतुर्भुजों और समचतुर्भुजों को ले कर छात्रों के मन में कोई गलत अवधारणा थी? यदि हाँ, तो किन्हीं दो का उल्लेख करें।	

### आत्मचिंतन

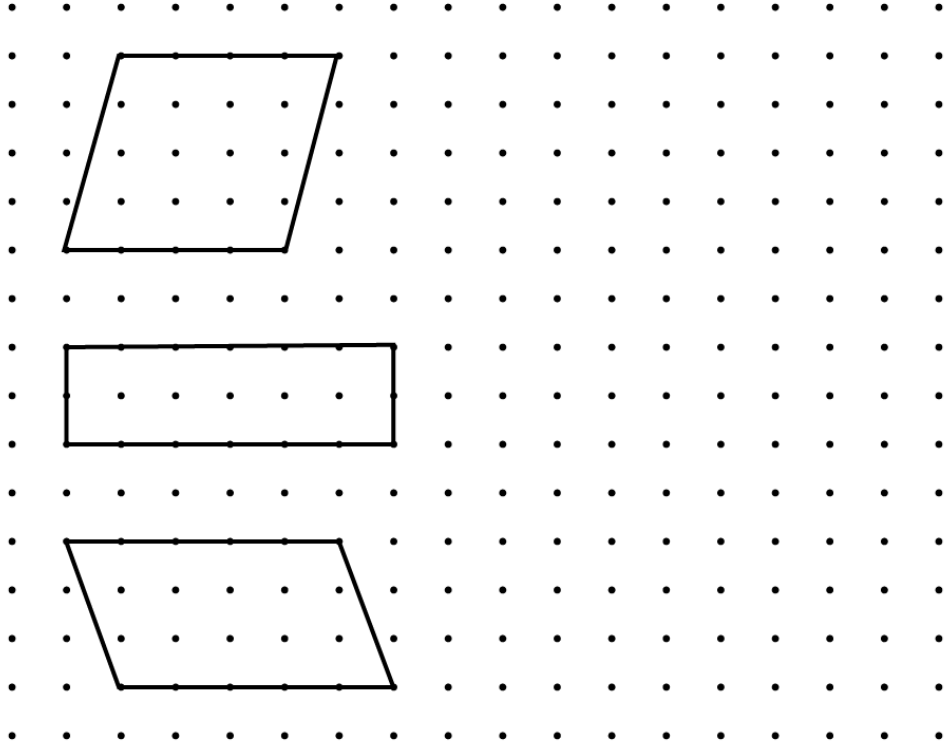
विशिष्ट चतुर्भुजों के संबंध में छात्रों के मन में बैठी गलत अवधारणा को दूर करने में आपको कौन-कौन सी कठिनाइयों का सामना करना पड़ा? आप उनका समाधान कैसे किया?	
आपके विचार से छात्रों के मन में किन कारणों से गलत अवधारणा थी?	
कुछ ऐसे प्रश्नों का उल्लेख करें, जिन्हें चर्चा के दौरान छात्रों ने आपसे पूछा था और आपके विचार से वे बेहद महत्वपूर्ण थे।	

## पाठ 7

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

इस गतिविधि में छात्र अकेले-अकेले (या पूर्वनिर्धारित छोटे समूहों में) एक डॉट पेपर पर वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज और समचतुर्भुज बनाएँगे।

छात्रों को एक डॉट वाली शीट पर आकृतियाँ बनानी होंगी।



छात्रों से इसकी स्पष्ट व्याख्या करने को कहें कि दिए गए समांतर चतुर्भुज एक-दूसरे से क्यों अलग हैं। उनसे एक ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाने को कहें, जो दिए गए समांतर चतुर्भुजों से अलग हो। उनसे पूछें कि उन्हें क्यों लगता है कि अमुक आकृति एक समांतर चतुर्भुज है। वे समांतर चतुर्भुज बनाने के लिए उसके किन गुणों का उपयोग करते हैं?

साथ ही उनसे भुजा, कोण और विकर्ण के गुणों के परिप्रेक्ष्य में समांतर चतुर्भुजों के गुणों पर चर्चा करने के लिए कहें। आप इस अभ्यास के क्रम में छात्रों द्वारा बनाई गई अन्य आकृतियों पर भी चर्चा कर सकते हैं।

छात्रों के छोटे-छोटे समूहों के साथ विशिष्ट चतुर्भुजों, जैसे कि समांतर चतुर्भुजों, समचतुर्भुजों आदि के आम गुणों पर चर्चा करें।

वर्कशीट में दिए गए स्थान में छात्रों द्वारा विशिष्ट चतुर्भुजों के संबंध में सुझाए गए भुजा, कोण और विकर्ण से संबंधित गुणों की एक सूची बनाकर छात्रों की समझ को पुख्ता करें।

### स्मरणीय तथ्य

छात्रों की विकर्ण संबंधी गुणों का अन्वेषण करने में मदद करें। कोण और भुजा के गुणों के विपरीत, यह गुण प्रत्यक्षतः (सीधे) नज़र नहीं आता। विकर्ण एक अतिरिक्त विशेषता है, जिसे हमें आकृति में शामिल करते हैं। छात्रों को उनके द्वारा सुझाए गए भिन्न विशिष्ट चतुर्भुजों की गुण सूचियों की तुलना करने के लिए प्रोत्साहित करें।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

विभिन्न समांतर चतुर्भुजों के मामले में छात्रों द्वारा सुझाई गई कुछ समानताओं और विषमताओं का वर्णन करें।	
कुछ ऐसी चर्चाओं का उल्लेख करें, जो छात्र समूहों में उनके द्वारा बनाए गए विभिन्न समांतर चतुर्भुजों, आयतों, वर्गों और समचतुर्भुजों के बीच समानताएँ और विषमताएँ ढूँढते समय कर रहे थे।	
क्या छात्रों ने विकर्ण से संबंधित गुणों का आसानी से पता लगा लिया?	

### आत्मचिंतन

आपको क्यों लगता है कि समूहों में काम करने से छात्रों को बेहतर ढंग से सीखने में मदद मिली? आप इस गतिविधि या अन्य गतिविधियों के संबंध में आपको हुए अनुभवों पर विचार कर सकते हैं।	
क्या आपको लगता है कि छात्र एक-दूसरे की गलतियों से सीख रहे थे? कैसे?	
कुछ ऐसी चुनौतियों का उल्लेख करें, जो यह परिचर्चा आयोजित करते समय आपके सामने आईं।	

## इकाई 4: गुण-आधारित तर्क-क्षमता

### अवलोकन

इस इकाई में दी गई गतिविधियों के माध्यम से, छात्र धीरे-धीरे विशिष्ट चतुर्भुजों के वर्गों के बीच के जटिल संबंधों को समझने लगेंगे - खासतौर से पदानुक्रमिक वर्ग के संबंधों को। वर्ग समावेशन संबंधों की यह समझ इन संबंधों को वेन आरेखों के रूप में दर्शाकर पुख्ता की जाएगी।

यह इकाई छात्रों को वैकल्पिक परिभाषाओं के अस्तित्व और परिभाषाओं की आवश्यकता के संबंध में भी जागरूक बनाती है - खासतौर पर साझा परिभाषाओं के बारे में, जिनका उपयोग विचारों के बेहतर संप्रेषण के लिए किया जा सकता है।

पिछली इकाई में छात्रों ने विशिष्ट चतुर्भुजों की गुण सूचियाँ बनाई थीं। इस इकाई में, वे इन गुण सूचियों को इस तरह व्यवस्थित करेंगे, जिससे वे आकृतियों के विभिन्न वर्गों के बीच मौजूद पदानुक्रमिक संबंधों को देख सकेंगे। इसके बाद पुलिस क्वॉड खेल (मिशन 4) खेला जाएगा - जिससे उन्हें वर्ग समावेशन का अनौपचारिक ज्ञान प्राप्त करने का अवसर मिलेगा और इसके पश्चात इस विचार से संबंधित अन्य प्रश्नों, चर्चाओं का दौर चलेगा और छात्रों के मन में इस विचार को पुख्ता किया जाएगा। इसके बाद छात्र वस्तुओं के वर्गों के बीच के संबंध को चित्रों (वेन आरेखों) के रूप में दर्शाने का तरीका सीखेंगे और इन संबंधों को चित्र के रूप में दर्शाकर वर्ग समावेशन की अपनी समझ को पुख्ता करेंगे। इस युनिट का अंत एक कहानी-आधारित पाठ से होगा, जिसकी सहायता से छात्र समझ सकेंगे कि किसी अवधारणा (या शब्द) को अलग-अलग तरह से परिभाषित करना और साथ ही साझा परिभाषाओं की ज़रूरत को सराहना ज़रूरी है।

### अध्ययन का उद्देश्य

यह युनिट पूरी करने के बाद, छात्र

- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझ सकेंगे (समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग)।
- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच मौजूद वर्ग समावेशन संबंधों को समझकर उनका स्पष्टीकरण दे सकेंगे (उदाहरण के लिए, कोई आयत अनिवार्यतः एक समांतर चतुर्भुज क्यों होता है)।
- वेन आरेखों के बुनियादी तर्क को समझकर इस तर्क का इस्तेमाल आकृतियों को उनके गुणों के आधार पर वर्गीकृत कर सकेंगे
- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच मौजूद वर्ग समावेशन संबंधों को चित्रों के माध्यम से 'देख' और समझ सकेंगे।
- साझा परिभाषाओं की आवश्यकता को सराह सकेंगे।

### पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृतियों के वर्गों और उन्हें परिभाषित करने वाले गुणों का ज्ञान।
- समांतर चतुर्भुजों, समचतुर्भुजों, आयतों और वर्गों के गुणों (विकर्ण के गुणों सहित) की पहचान और उन्हें सूचीबद्ध करने की योग्यता।
- आकृति के वर्गों के बीच समानताओं और विषमताओं का पता लगाने के लिए उनके गुणों का विश्लेषण करने की योग्यता।

### पूर्व अपेक्षित आई. सी. टी. ज्ञान

- ड्रैग, ड्रॉप तथा इंटरफ़ेस के इस्तेमाल से संबंधित कार्यविधियों का ज्ञान

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

पाठ	गतिविधि	गतिविधि का नाम	अनुशंसित अवधि (मिनट)	माध्यम
पाठ 8: विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच का संबंध	4.1	पुलिस क्वॉड मिशन 4	45	डिजिटल
	4.2	गुणों की सूची बनाना	45	स्वयं करें
	4.3	विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच का संबंध	45	स्वयं करें + कक्षा परिचर्चा
पाठ 9: संबंधों का निरूपण	4.4	संबंधों का निरूपण - 1	45	स्वयं करें + कक्षा परिचर्चा
	4.5	संबंधों का निरूपण - 2	45	स्वयं करें + कक्षा परिचर्चा
पाठ 10: परिभाषाओं पर चर्चा	4.6	एक समलंब चतुर्भुज क्या होता है?	45	डिजिटल
मूल्यांकन 4	4.7	मूल्यांकन - युनिट 4	45	वर्कशीट



## पाठ 8

### कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

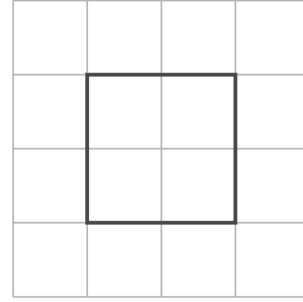
इस गतिविधि का उद्देश्य खेल से मिले ज्ञान को पुख्ता करना तथा वर्ग समावेशन के विचारों को आत्मसात करना है।

छात्रों से उन रणनीतियों का वर्णन करने के लिए कहें, जिनका उपयोग उन्होंने किया था और साथ ही इस कक्षा परिचर्चा में पदानुक्रमिक वर्गीकरण को समझने में छात्रों की सहायता करें।



आप बोर्ड पर निम्न आकृति बना सकते हैं:

छात्रों से पूछें कि क्या कंप्यूटर ने आयत तैयार करते समय ऊपर दी गई आकृति (वर्ग) बनाई थी या नहीं। उनसे पूछें कि उन्हें क्या लगता है कि कंप्यूटर सही था या गलत। उन्हें अपनी प्रतिक्रियाओं का कारण बताने के लिए प्रोत्साहित करें।



विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंध को समझने में छात्रों की सहायता करें। दो (या अधिक) विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच की समानताओं और विषमताओं पर चर्चा करें। आप बोर्ड पर निम्न सूची बना सकते हैं और फिर छात्रों की मदद से यह तालिका भर सकते हैं।

गुण	वर्ग	आयत	समांतर	चतुर्भुज	समचतुर्भुज
1 केवल 4 रेखा खंडों से मिलकर बनी एक बंद आकृति	✓	✓	✓	✓	✓
2 सम्मुख भुजाओं के युग्मों की लंबाई बराबर होती है					
3 सम्मुख भुजाओं के युग्म समानांतर होते हैं					
4 सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं					
5 विकर्ण एक-दूसरे का प्रतिच्छेदन करते हैं					
6 सभी कोण समकोण/बराबर होते हैं					
7 आसन्न कोण बराबर होते हैं					
8 विकर्णों की लंबाई बराबर होती है					
9 सम्मुख भुजाओं की लंबाई बराबर होती है					
10 सभी 4 भुजाओं की लंबाई बराबर होती है					
11 विकर्ण एक-दूसरे के अभिलंब होते हैं					

## कक्षा कक्ष परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

विशिष्ट चतुर्भुजों के वर्गों के आम गुणों के साथ-साथ उन गुणों की तरफ ध्यान आकर्षित करें, जिनके लिहाज़ से उनमें फ़र्क होता है। छात्रों से पूछें:

- आयत के क्या गुण होते हैं?
- वर्ग के क्या गुण होते हैं?
- क्या आयत के सभी गुण एक वर्ग में भी होते हैं?
- क्या किसी वर्ग को एक आयत कहा जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
- क्या किसी आयत को वर्ग कहा जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
- वर्ग में ऐसे कौन से गुण होते हैं, जो आयत में नहीं होते?

विशिष्ट चतुर्भुजों के अलग-अलग युग्मों के साथ मिलते-जुलते प्रश्न दोहराएँ और छात्रों को गुण तालिका के माध्यम से पदानुक्रमिक वर्गीकरण के विचारों से अवगत करवाएँ।

## स्मरणीय तथ्य

छात्रों को यह समझने में कठिनाई हो सकती है कि कोई आकृति एक ही समय में दो अलग-अलग वर्गों से कैसे संबंधित हो सकती है। उदाहरण के लिए, छात्रों को यह समझने में कठिनाई हो सकती है कि एक वर्ग एक आयत भी होता है।

हो सकता है कुछ छात्र आयतों और वर्गों को इस तरह परिभाषित करें कि आयत की परिभाषा में वर्ग को आयत की श्रेणी से बहिष्कृत कर दिया जाए। ऐसा करने के लाभों और हानियों पर चर्चा करें।

छात्रों को इसके और उदाहरण दें कि कोई आकृति किसी एक से अधिक वर्गों से कैसे संबंधित हो सकती है। आप इस पर भी एक चर्चा शुरू कर सकते हैं कि एक समबाहु त्रिकोण एक समद्विबाहु त्रिकोण भी होता है, या एक षट्कोण एक बहुभुज भी होता है या एक चतुर्भुज एक बहुभुज भी होता है।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

छात्रों ने 'क्या एक वर्ग एक आयत भी होता है?' प्रश्न का पहले-पहल क्या उत्तर दिया? कुछ ऐसी प्रतिक्रियाओं और उनके संबंध में छात्रों द्वारा बताए गए कारणों का उल्लेख करें।

ऐसी दो रणनीतियों का उल्लेख करें, जिन पर छात्रों ने खेल खेलते समय चर्चा की।

छात्रों को वर्ग समावेशन के विचार से अवगत करवाते समय, आपने कौन-कौन से उदाहरणों पर चर्चा की?

## आत्मचिंतन

<p>आपको क्यों लगता है कि छात्रों को यह विचार स्वीकार करने में कठिनाई हो सकती है कि एक ही आकृति के दो अलग-अलग नाम हो सकते हैं? (वर्ग समावेशन के विचार के संदर्भ में)</p>	
<p>उन चुनौतियों का उल्लेख करें, जो यह कक्षा कक्ष परिचर्चा आयोजित करते समय आपके सामने आईं।</p>	
<p>आपको क्यों लगता है कि वर्ग समावेशन के विचार से परिचित होने पर छात्रों को और सहायता मिलेगी?</p>	

## पाठ 9

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

इस गतिविधि का उद्देश्य वेन आरेखों को समझने में छात्रों की मदद करना है और विशिष्ट चतुर्भुजों को चित्र के रूप में दर्शाकर उनके वर्ग समावेशन के संबंधों के ज्ञान को पुख्ता करना है।

आप छात्रों से खुद को अलग-अलग प्रकार के समूहों में व्यवस्थित करने के लिए कह सकते हैं। कुछ सुझाव इस प्रकार हैं:

- लड़के और लड़कियाँ
- ऐसे लोग, जो चश्मा पहनते हैं और ऐसे लोग, जिनकी पोशाक में नीला रंग है,
- कक्षा 9 के छात्र और कक्षा 9 की छात्राएँ।

वेन आरेखों का उपयोग करके उनके साथ निरूपणों पर चर्चा करें और वेन आरेखों का उपयोग करके ब्लैकबोर्ड पर इन संबंधों का निरूपण करें।

छात्रों की यह समझने में मदद करें कि वे आकृतियों के एक वर्ग तथा उनके बीच के संबंधों को दर्शाने के लिए वेन आरेखों का किस तरह उपयोग कर सकते हैं। संबंध 3 संभावित प्रकार के हो सकते हैं

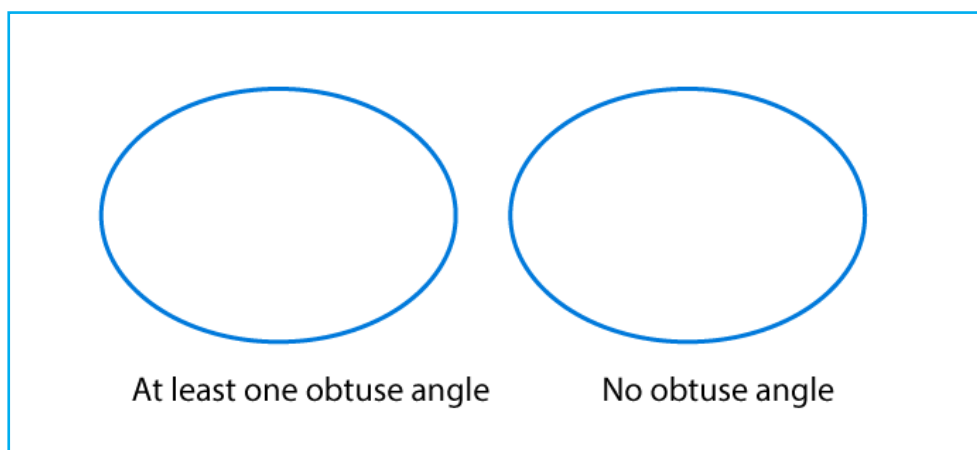
- जहाँ एक वर्ग की कुछ वस्तुएँ दूसरे वर्ग की वस्तुओं के समान हैं
- जहाँ एक वर्ग पूरी तरह दूसरे वर्ग में समाहित है
- जहाँ एक वर्ग का कोई भी तत्व दूसरे वर्ग में मौजूद नहीं है।

छात्रों से एक समूह में वर्कशीट में दिए इस तरह के कार्यों पर चर्चा करने के लिए कहें:

- नीचे दी गई प्रत्येक आकृति से संबंधित संख्या को दिए गए वेन आरेख के उचित स्थान में लिखें।

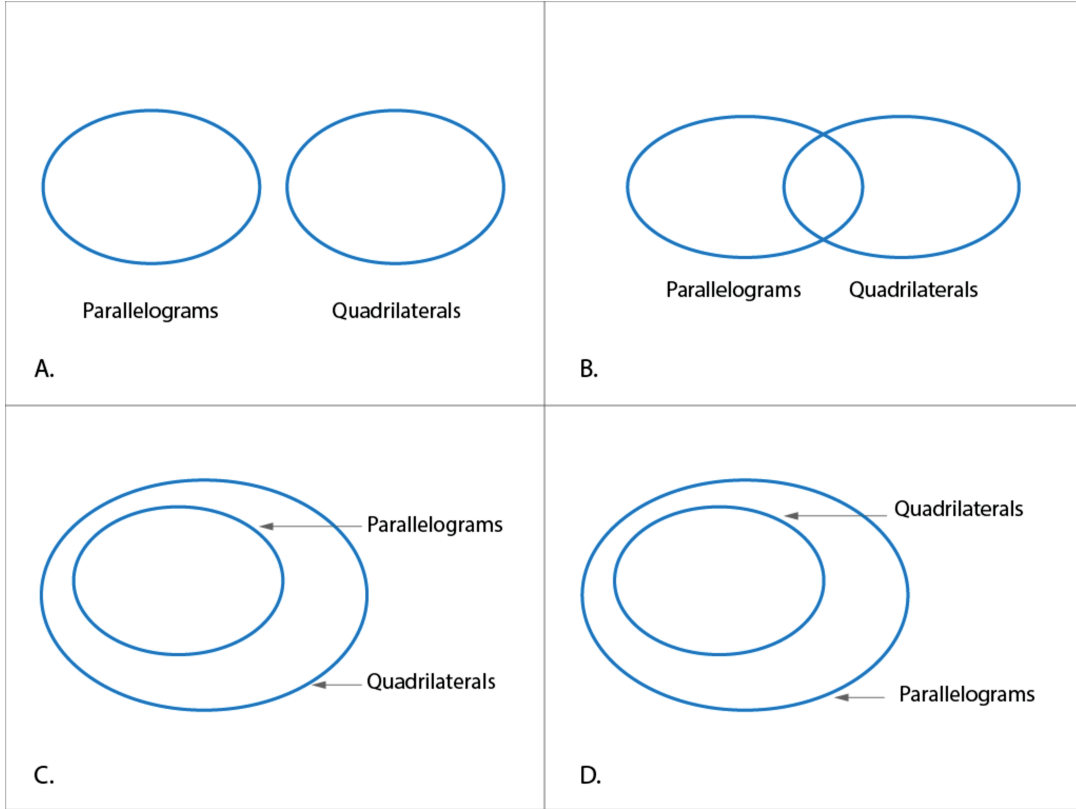


छात्रों को इन 3 प्रकार के संबंधों का पर्याप्त उदाहरणों के साथ परिचय दें (जैसा कि वर्कशीट में दिया गया है), साथ ही उन्हें ऐसे वर्गों के उदाहरण भी देने को कहें, जो उक्त तरीके से संबंधित हैं। जब वे वर्गों के बीच मौजूद अलग-अलग प्रकार के संबंधों और उन्हें निरूपित करने का तरीका समझ लें, तो विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझने और उन्हें निरूपित करने के विषय पर आगे बढ़ जाएँ। वर्कशीट में दिए गए कार्यों से मिलते-जुलते कार्य सहायक साबित हो सकते हैं



### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

2 .इनमें से कौन, समांतर चतुर्भुजों और चतुर्भुजों का सही निरूपण है और क्यों? (हो सकता है आप चतुर्भुजों और समांतर चतुर्भुजों की परिभाषा और उनके गुणों का उपयोग करके देखना चाहें कि वे किस तरह संबंधित हैं।)



आप छात्रों से उनके उत्तरों का स्पष्टीकरण देने के लिए कह सकते हैं।

छात्रों के साथ चर्चा करें - क्या सभी चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं? क्या सभी समांतर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं, आदि।

आप अन्य विशिष्ट चतुर्भुजों के साथ भी इसी तरह के अभ्यास कर सकते हैं।

छात्रों से विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों की व्याख्या करने को कहें। उदाहरण के लिए, एक वर्ग एक आयत भी होता है, वर्ग और आयत समांतर चतुर्भुज भी होते हैं आदि। सभी वर्ग समचतुर्भुज होते हैं, कुछ समचतुर्भुज आयत होते हैं, आदि।

विशिष्ट चतुर्भुजों के गुणों पर नज़र डालने और फिर उनके आधार पर संबंधों को समझने पर ज़ोर दें।

छात्रों के साथ निम्न कार्य के बारे में चर्चा करें और किसी आरेख में विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को निरूपित करने वाला एक आरेख तैयार करने में उनकी मदद करें:

ऊपर दिए गए कार्यों में चुने गए निरूपणों का उपयोग करके, एक ही आरेख में चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग इन सभी को दर्शाएँ। चतुर्भुजों को दर्शाने के लिए एक आयत का इस्तेमाल करें और शेष चतुर्भुजों को दर्शाने के लिए उपयुक्त वर्तुलों का उपयोग करें।

## स्मरणीय तथ्य

वास्तविक जीवन के प्रासंगिक उदाहरणों से शुरुआत करते हुए वेन आरेखों को समझने में छात्रों की सहायता करें

- राज्य और देश
- कक्षा 9 के छात्र और समूचा स्कूल
- ऐसे लोग जिन्हें क्रिकेट पसंद है और ऐसे लोग जिन्हें फुटबॉल पसंद है आदि।

छात्रों को यह समझना होगा कि इस चर्चा में समूहों के बीच विभिन्न प्रकार के संबंध हैं - वे असंबद्ध (ओवरलैप न होने वाले), ओवरलैप होने वाले हो सकते हैं या एक समूह के अंदर दूसरा समूह समाहित हो सकता है। उदाहरण दे कर इन संबंधों को वेन आरेखों में निरूपित करने का तरीका समझने में उनकी मदद करें। इस ज्ञान का उपयोग करके विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को निरूपित करने में उनकी सहायता करें।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या छात्र वेन आरेखों के विचार को समझ सके? क्या वास्तविक जीवन से जुड़े उदाहरणों का उपयोग करने से मदद मिली?	
छात्रों के विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंध की व्याख्या कैसे की? कोई दो उदाहरण दें।	
ऐसी कुछ कठिनाइयों का उल्लेख करें, जिनसे कक्षा परिचर्चा के दौरान छात्रों को जूझना पड़ा।	

## आत्मचिंतन

आपके विचार से छात्रों को विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझने में क्यों कठिनाई आ रही थी? इसके क्या कारण हो सकते हैं?	
क्या आपको लगता है कि हमने छात्रों की मदद से जो गतिविधियाँ आयोजित की थीं, वे उनकी तर्क-क्षमता को विकसित करने में सहायक होंगी? कैसे?	
ऐसी कुछ कठिनाइयों का उल्लेख करें, जो कक्षा कक्षा परिचर्चा के दौरान आपके सामने आईं।	

## पाठ 10

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

इस गतिविधि का उद्देश्य छात्रों की यह समझने में मदद करना है कि अलग-अलग लोग एक ही शब्द के अलग-अलग अर्थ निकालते हैं, जिससे गलतफ़हमी और उलझन पैदा होती है। यह गतिविधि साझा परिभाषा की आवश्यकता पर ज़ोर देती है। आप वास्तविक जीवन से जुड़े कुछ ऐसे उदाहरण दे सकते हैं, जिसमें एक ही शब्द के अलग-अलग अर्थ हो सकते हैं - जैसे इंटरनेट, लेफ़्ट, बैलेंस, वॉल्यूम आदि।

आप कुछ 'गैर-गणितीय' शब्दों पर भी चर्चा कर सकते हैं, जैसे कि शहर, पर्वत, अच्छाई आदि शब्दों की परिभाषाएँ।

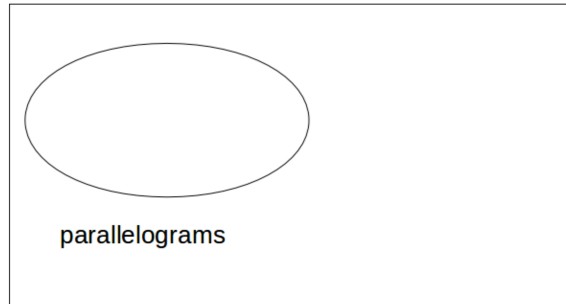
'एक समलंब चतुर्भुज क्या होता है' कहानी पर चर्चा करें। पूरी कहानी बयान करने के बाद, कहानी के तीन बच्चों द्वारा इस्तेमाल की गई परिभाषाओं पर चर्चा करें। छात्रों से समलंब चतुर्भुज की उनकी अपनी परिभाषा तैयार करने को कहें।

1. समलंब चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी भुजाओं का एक युग्म समानांतर होता है (कानसू की परिभाषा)
2. समलंब चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी भुजाओं का कम-से-कम एक युग्म समानांतर होता है (जो की परिभाषा)
3. समलंब चतुर्भुज दरअसल चतुर्भुज का एक ही एक दूसरा नाम है (साहिर की परिभाषा)

छात्रों से पूछें कि इनमें से किसकी परिभाषा सही है और क्यों? छात्रों से पूछें कि क्या एक से अधिक परिभाषाएँ सही हो सकती हैं?

छात्रों से इसकी कल्पना करने को कहें कि यदि उक्त बच्चों में से प्रत्येक की समलंब चतुर्भुज के संबंध में उनकी अपनी परिभाषा हो, तब क्या होगा।

quadrilaterals



छात्रों को ऊपर दी गई तीन परिभाषाओं के आधार पर निम्नलिखित वेन आरेख में समलंब चतुर्भुजों को निरूपित करने को कहें:

छात्रों के साथ इस पर चर्चा करें कि प्रत्येक परिभाषा को किस तरह अलग-अलग ढंग से वेन आरेख में निरूपित किया जाएगा।

छात्रों से उनके द्वारा निर्मित वेन आरेख की व्याख्या करने के लिए कहें और इसके लिए उन्हें समलंब चतुर्भुजों और समांतर चतुर्भुजों के बीच के संबंध का वर्णन करने के लिए कहें, जैसे

- A. सभी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं।
- B. सभी समांतर चतुर्भुज समलंब चतुर्भुज होते हैं।
- C. सभी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं।
- D. कोई भी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज नहीं होता।

ऊपर दी गई परिभाषाओं पर विस्तृत चर्चा करें।

छात्रों से उनकी पाठ्य पुस्तक में प्रदत्त परिभाषा की पहचान करने के लिए कहें। वे अवधारणाओं के साझा अर्थों पर चर्चा कर सकते हैं।

छात्रों से पूछें कि पाठ्य पुस्तक में समलंब चतुर्भुज की केवल एक परिभाषा क्यों दी गई है? उनके पूछें कि यदि पाठ्य पुस्तक में अनेक परिभाषाएँ होतीं, तो क्या होता? उनसे पूछें कि उनके विचार से उनकी पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषाएँ किसने तैयार की होंगी?

## स्मरणीय तथ्य

आपको छात्रों की यह समझने में सहायता करनी होगी कि परिभाषाएँ दरअसल साझा अर्थों से मिलकर बनी होती हैं और उनका एक समान होना आवश्यक है। छात्रों की यह देखने में मदद करें कि अलग-अलग परिभाषाएँ स्वीकार्य तो हैं, लेकिन लोगों के मन में उनकी साझा समझ होनी चाहिए और परिभाषा के स्वीकार होने के बाद उसके तार्किक परिणामों को भी स्वीकार करना होगा। उनकी यह समझने में मदद करें कि समलंब चतुर्भुजों के मामले में अलग-अलग परिभाषाएँ होती हैं। अपनी पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषा पर नज़र डालें और छात्रों को उसे समलंब चतुर्भुज की एक साझा परिभाषा मानकर उस पर काम करने के लिए कहें।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या छात्रों ने उनकी अपनी परिभाषाएँ तैयार कीं? उनमें से कुछ का उल्लेख करें।	
क्या छात्रों ने इस पर विचार किया कि किसी अवधारणा की केवल एक परिभाषा हो सकती है। उनके द्वारा दिए गए कुछ कारणों का उल्लेख करें।	
किसी अवधारणा की अनेक परिभाषाएँ होने की बात पर छात्रों ने क्या तर्क-वितर्क किए? उदाहरण दें।	
उनके विचार से पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषाएँ किसने तैयार की थीं? उनके कुछ विचारों का उल्लेख करें।	

## आत्मचिंतन

क्या छात्र इस विचार से सहमत थे कि एक ही अवधारणा की अलग-अलग परिभाषाएं हो सकती हैं? क्या आपके लिए छात्रों के साथ इस पर चर्चा करना आसान था? आपके सामने आई कुछ चुनौतियों का उल्लेख करें।	
आपकी पाठ्य पुस्तक में समलंब चतुर्भुज की क्या परिभाषा दी गई है?	
इस पाठ के बाद, क्या आप पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषाओं के संबंध में किसी दूसरे ढंग से विचार कर रहे हैं? कैसे?	
कुछ ऐसी अन्य अवधारणाओं का उल्लेख करें, जिनके लिए आपको अलग-अलग परिभाषाएँ देखने को मिली हैं।	



## इकाई 5 : प्रमाणों की जरूरत को समझना

### अवलोकन

इस इकाई में विद्यार्थी इस बात को समझते हैं कि पड़ताल और आगमनात्मक तर्क गणितीय सिद्धांतों को खोजने के महत्वपूर्ण तरीके होते हैं लेकिन ये दोषमुक्त नहीं होते, और इसलिए हमें निगमनात्मक तर्कों और 'प्रमाणों' की आवश्यकता होती है।

इस विचार तक समझ निर्मित करने के लिए विद्यार्थी ऐसी गतिविधियों से शुरुआत करते हैं जिनमें उन्हें विभिन्न व्यवस्थाओं (पैटर्न) का अवलोकन करके कुछ अनुमान लगाना होते हैं। वे विभिन्न उदाहरणों में अपने अनुमानों को जाँचते हैं, और इस प्रकार जाँच तथा प्रमाण के बीच के भेद को समझना शुरू करते हैं। एक सक्रिय गतिविधि के द्वारा वे इस बात को भी जान लेते हैं कि किसी अनुमान को असत्य प्रमाणित करने के लिए एक ही विपरीत उदाहरण पर्याप्त होता है। उन्हें यह भी पता चलता है कि किसी अनुमान को निर्णायक रूप से 'प्रमाणित' करने के लिए आगमनात्मक तर्क पर्याप्त नहीं होते। विद्यार्थियों का निगमनात्मक तर्क वाले 1-2 प्रमाणों से भी परिचय कराया जाता है।

विद्यार्थी सबसे पहले अलग-अलग प्रकार के चतुर्भुजों के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाए गए चतुर्भुजों के बारे में पड़ताल करते हैं। शिक्षकों के मार्गदर्शन में होने वाली पड़तालों से शुरू करके धीरे-धीरे वे स्वतंत्र रूप से अपने अनुमान लगाने लगते हैं। इसके बाद, विद्यार्थी किसी बहुभुज की भुजाओं की संख्या और उसके आंतरिक कोणों के योग के बीच के संबंध की पड़ताल करते हैं। पहले वे चतुर्भुजों के लिए मार्गदर्शित अनुमान लगाते हैं, इसे सामान्य नियम के रूप में सिद्ध करते हैं, और फिर इसे 'प्रमाण' के रूप में स्थापित करने में लग जाते हैं, जिसमें शिक्षक उनकी अगुआई करते हैं। इसके बाद, वे जियोजेब्रा साफ्टवेयर में अलग-अलग बहुभुजों के कोणों के योग के बारे में पड़ताल करते हैं, एक सामान्य 'नियम' बनाते हैं और फिर अनौपचारिक निगमनात्मक तर्कों द्वारा उस नियम को सही सिद्ध करते हैं। इसके अगले पाठ में विद्यार्थियों को एक कार्य दिया गया है जिसमें वे कुछ उदाहरणों के आधार पर एक (बहुत स्पष्ट लगने वाले) नियम तक पहुँच सकते हैं, जहाँ उनका सामना ऐसे विपरीत उदाहरण से होता है जो उनके नियम को खंडित कर देता है। इससे उन्हें यह सीख मिलती है कि उदाहरणों के आधार पर बनाए गए सामान्य नियम दोषयुक्त होते हैं, और इसीलिए गणित में निगमनात्मक प्रमाणों की जरूरत होती है।

मध्य बिन्दु के पड़ताल की गतिविधि को पूरा करने के लिए विद्यार्थियों को इस औपचारिक निगमनात्मक प्रमाण से भी परिचित करा दिया जाता है कि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज, समानांतर चतुर्भुज होता है। यह इकाई एक अनौपचारिक गतिविधि के साथ समाप्त होती है जिसमें यह देखने की कोशिश की गई है कि क्या विद्यार्थी इकाई में शामिल मूल विचारों (तर्क और प्रमाण से संबंधित) में से कुछ को वाकई समझ पाए हैं और उन्हें उपयोग कर पा रहे हैं या नहीं।

### अध्ययन का उद्देश्य

इस इकाई को समझने के बाद विद्यार्थी

- 'अनुमान' शब्द का अर्थ समझ जाएंगे, विभिन्न व्यवस्थाओं का अवलोकन करके अपने अनुमान बना पाएंगे और उन्हें सही सिद्ध कर पाएंगे।
- अनुमानों को स्पष्ट ढंग से व्यक्त करने लगेंगे।
- किसी अनुमान को 'जाँचने' और उसे प्रमाणित करने के बीच के अंतर को समझ पाएंगे।
- अनौपचारिक (निगमनात्मक) तर्क का प्रयोग करते हुए अनुमानों को सिद्ध करना सीख जाएंगे।
- इस बात को समझेंगे कि कोई एक विपरीत उदाहरण भी किसी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए पर्याप्त होता है।
- इस बात को समझेंगे कि गणित में किसी कथन को निर्णायक रूप से सत्य सिद्ध करने के लिए कितने भी उदाहरण नाकाफी होते हैं।
- आगमनात्मक तर्क में दोष हो सकने की संभावना को समझेंगे, जिसके नतीजे में निगमनात्मक तर्कों की जरूरत को भी समझेंगे।
- किसी चतुर्भुज के कोणों के योग के गुणधर्म को भी समझेंगे और उसका उपयोग कर पाएंगे।
- चतुर्भुज पर पाठ्यपुस्तक में जो अध्याय है उसमें दिए गए कुछ प्रमेयों/ निष्कर्षों को सत्य प्रमाणित कर पाएंगे।

### पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- व्यवस्थाओं को देख पाने की क्षमता
- दी गई धारणाओं/ मान्यताओं के आधार पर किसी निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए तर्क करने की क्षमता
- विशेष चतुर्भुजों, बहुभुजों आदि की परिभाषाओं की समझ
- त्रिभुज के कोणों के योग के गुणधर्म की जानकारी, और उसे सवाल में उपयोग कर पाना
- समानांतर रेखाओं और अनुप्रस्थ रेखाओं से संबंधित गुणधर्मों (वैकल्पिक कोणों के युग्म समान होते हैं, आदि) की जानकारी
- मध्य बिन्दु प्रमेय का निष्कर्ष (शिक्षक द्वारा तैयार की गई पड़ताल के माध्यम से जाना गया हो)

### पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

- जिओजेट्रा साफ्टवेयर की बुनियादी इंटरफेस और टूल्स (उपकरणों) से परिचित होना

### पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

पाठ	गतिविधि	गतिविधि का नाम	अनुशंसित अवधि (मिनट)	माध्यम
पाठ 11 : मध्य बिन्दु - पड़ताल	5.1	मध्य बिन्दु पड़ताल	45	सक्रिय
पाठ 12 : कोणों के योग का गुणधर्म	5.2	मध्य बिन्दु पड़ताल	45	सक्रिय
	5.3	बहुभुजों के कोणों के योग के गुणधर्म की पड़ताल	90	डिजिटल
पाठ 13 : प्रमाण की आवश्यकता	5.4	प्रमाण की आवश्यकता	45	सक्रिय + कक्षा में चर्चा
पाठ 14 : प्रमाण का लेखन	5.5	चतुर्भुजों के बारे में मध्य बिन्दु के निष्कर्ष को सही सिद्ध करना	45	कक्षा में चर्चा
पाठ 15 : सही और गलत सिद्ध करना	5.6	सही और गलत कथन	45	सक्रिय
आकलन 5	5.7	अंतिम आकलन	45	डिजिटल

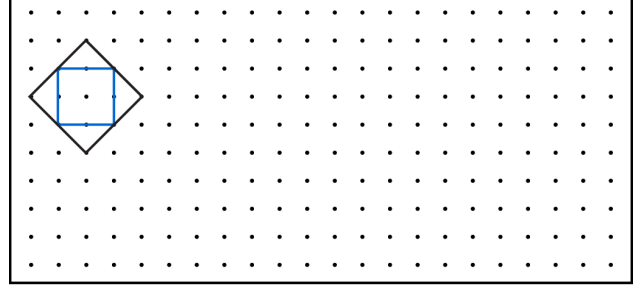
## पाठ 11

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

मध्य बिन्दु की पड़ताल की गतिविधि विद्यार्थियों को अनुमान लगाने और उन्हें जाँचने का मौका देगी।

विद्यार्थियों से डॉट पेपर पर विभिन्न वर्गों की प्रत्येक भुजा के मध्य बिन्दुओं को मिलाने को कहें, और फिर पूछें कि उन्हें कौन सा चतुर्भुज मिला। विद्यार्थी इस तरह के अनुमान लगाएंगे -

किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज \_\_\_\_\_ होता है।



विद्यार्थियों से पूछें कि किसी आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर उन्हें कौन सा आकार प्राप्त होगा। उनके अनुमानों को सही सिद्ध करने में उनकी सहायता करें। इन अनुमानों की जाँच करने के लिए विद्यार्थी डॉट पेपर पर आयत बनाएं और उनकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाएं। इसी प्रकार विद्यार्थियों से सम चतुर्भुज और समानान्तर चतुर्भुज के लिए अनुमान लगाने को कहें। इसके बाद विद्यार्थी इन अनुमानों से सभी चतुर्भुजों के लिए व्यापक अनुमान लगाएंगे।

विद्यार्थियों से पूछें :

- आपने अपना अनुमान कैसे लगाया?
- क्या आपको विश्वास है कि यह अनुमान सभी चतुर्भुजों के लिए सही होगा? आप यह कैसे जानते हैं?

स्वतंत्र रूप से अपने अनुमान बनाने में और उन्हें सही सिद्ध करने में विद्यार्थियों की सहायता करें। विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के बारे में विद्यार्थियों की समझ का यहाँ उपयोग किया जा सकता है।

### स्मरणीय तथ्य

इन बातों को देखने में विद्यार्थियों की सहायता करें :

किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक वर्ग ही मिलता है।

किसी भी आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक सम चतुर्भुज मिलता है।

किसी भी सम चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक आयत मिलता है।

किसी भी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक समानान्तर चतुर्भुज मिलता है।

आप समूह के समावेश (क्लास इन्क्लूजन) के विचार को यहाँ पुनः दोहरा सकते हैं। किसी भी चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर हमें एक समानान्तर चतुर्भुज मिलता है। विशेष चतुर्भुजों के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर हमें विभिन्न प्रकार के विशेष चतुर्भुज मिलते हैं और वे सभी समानान्तर चतुर्भुज होते हैं।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या विद्यार्थी सभी विशेष चतुर्भुजों को उनके गुणधर्मों के द्वारा पहचान पाए?	
वर्गों और आयतों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने के बारे में विद्यार्थियों ने जो अनुमान लगाए उनमें से कुछ लिखें।	
समानान्तर चतुर्भुजों और सम चतुर्भुजों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने के बारे में विद्यार्थियों द्वारा किए गए अनुमानों में से कुछ लिखें।	
क्या विद्यार्थी अपने अनुमानों को सही सिद्ध कर पाए? ऐसे कम से कम दो उदाहरण बताएं।	
क्या विद्यार्थी अपने अनुमानों को व्यक्त करने के लिए सटीक भाषा का उपयोग कर रहे थे? अपने अनुमानों को व्यक्त करते समय उन्हें भाषा और शब्दावली संबंधी किन समस्याओं का सामना करना पड़ रहा था? कुछ का उल्लेख करें।	

### आत्मचिंतन

अनुमान लगाते समय विद्यार्थियों को किस तरह की समस्याओं का सामना करना पड़ा?	
क्या इस गतिविधि में सभी विद्यार्थियों ने भाग लिया? अगर सब ने भाग नहीं लिया तो भाग न लेने के क्या कारण रहे होंगे?	
विद्यार्थियों द्वारा अनुमान लगाने और उन्हें सही सिद्ध करने के तरीके से क्या आपको उनका आकलन करने में मदद मिलती है? अगर हाँ, तो कैसे?	
अनुमान लगाते समय विद्यार्थियों से कौन सी गलतियाँ हुईं? क्या आप गलतियाँ सुधारने में उनका मार्गदर्शन कर पाए? किस तरह?	

## पाठ 12

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

इस गतिविधि का उद्देश्य विभिन्न व्यवस्थाओं का अवलोकन करके चतुर्भुजों के कोणों के योग के गुणधर्म को समझना है। विद्यार्थी एक अनुमान लगाते हैं और फिर अपने परिणाम से एक सामान्य नियम बनाते हैं। वे जाँचने और प्रमाणित करने के बीच के फर्क को समझते हैं और उनमें भेद कर पाते हैं। यह गतिविधि उन्हें व्यवस्थाओं को देखने तथा औपचारिक तर्क करने (और इस मामले में, प्रमाण देने) के बीच के संबंध को समझने में भी मदद करती है।

विद्यार्थियों से विभिन्न चतुर्भुज बनाने को कहें, और फिर वे 2 या 3 के समूह में काम करते हुए इन चतुर्भुजों के आंतरिक कोणों को मापें। उन्हें प्रेरित करें कि वे दूसरे समूहों से भी चर्चा करें और अपने उत्तरों की तथा उनके उत्तरों की तुलना करें।

उनसे कहें/ पूछें :

अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के साथ अपने चतुर्भुज की तुलना करें।

- क्या वे सभी एक से दिखते हैं?
- क्या आपको सभी तरह के चतुर्भुजों में आंतरिक कोणों के योग में कोई व्यवस्था/ नियमितता दिखाई देती है? अपने अवलोकन को एक अनुमान के रूप में लिखें।
- क्या आपको लगता है कि यह व्यवस्था सभी चतुर्भुजों के लिए सही सिद्ध होगी?
- क्यों होगा या क्यों नहीं होगा?

इस गतिविधि के अगले हिस्से में विद्यार्थियों से एक चतुर्भुज और उसका कोई एक विकर्ण बनाने को कहें। उनसे पूछें कि क्या वे इस चतुर्भुज के कोणों को मापे बगैर उसके आंतरिक कोणों का योग निकाल सकते हैं। यह समझने में विद्यार्थियों की मदद करें कि किसी चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है। त्रिभुज के आंतरिक कोणों के योग के गुणधर्म का उपयोग करते हुए चरणबद्ध ढंग से इस बात को सिद्ध करें कि किसी चतुर्भुज के आंतरिक कोणों का योग 360 डिग्री होता है। इसे सिद्ध करते वक्त विद्यार्थियों के विचारों को भी सुनें।

- विद्यार्थियों से पूछें कि क्या समानान्तर चतुर्भुजों पर भी यह गुणधर्म लागू होगा। अगर हाँ तो क्यों?
- उनसे पूछें कि क्या उनकी सोच में कोई ऐसा चतुर्भुज है जिसके आंतरिक कोणों का योग 360 डिग्री न होता हो?

(विद्यार्थी जिओज़ेबा का उपयोग करते हुए अपनी कम्प्यूटर प्रयोगशालाओं में निम्नलिखित गतिविधि करेंगे)

विद्यार्थियों से नीचे बताई गई भुजाओं की संख्या वाले बहुभुज बनाने को कहें। विद्यार्थी बहुभुज के आंतरिक कोणों को मापें और उनके योग को लिख लें। फिर वे बहुभुजों को एक दूसरे को न ढांकने वाले त्रिभुजों में बाँटें और हर बहुभुज में बने ऐसे त्रिभुजों की संख्या दर्ज करें और उसे नीचे दी गई तालिका में दर्ज करें :

नियमित बहुभुज में भुजाओं की संख्या	बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग	बहुभुजों से बने, एक दूसरे को न ढांकने वाले त्रिभुजों की संख्या	एक दूसरे को न ढांकने वाले सभी त्रिभुजों में कोणों का योग
4	360	2	360
5			
6			
7			

विद्यार्थियों से पूछें कि उन्होंने बहुभुजों के आंतरिक कोणों के योग में कौन सी व्यवस्था देखी।  $n$  भुजाओं वाले नियमित बहुभुजों के लिए कोई नियम बनाने में उनकी मदद करें।

विद्यार्थी यही काम अवतल/ उत्तल, नियमित/ अनियमित बहुभुजों के साथ भी करें और इस तरह के बहुभुजों में भी कोणों के योग की व्यवस्थाओं का अवलोकन करें।

इन गतिविधियों के आधार पर, किसी बहुभुज के आंतरिक कोणों के योग के बारे में एक सामान्य नियम बनाने में विद्यार्थियों की मदद करें।

### स्मरणीय तथ्य

किसी अवतल बहुभुज के शीर्षों को मिलाते समय एक बात ध्यान में रखना जरूरी है, कि बहुभुज के शीर्षों को एक से ज्यादा तरीकों से मिलाया जा सकता है। सिर्फ उन्हीं तरीकों को चुनें जो बहुभुज को, एक दूसरे को न ढांकने वाले त्रिभुजों में विभाजित करते हों। इन व्यवस्थाओं को देखकर सामान्य कथन और अनुमान तैयार करने में विद्यार्थियों की मदद करें। यह देखने के लिए कि वे लोग इसके बारे में क्या सोचते हैं, उनसे हमेशा अपने अनुमानों को सही सिद्ध करने के लिए कहें।

## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या विद्यार्थी किसी व्यवस्था के बारे में कोई सामान्य नियम बना पाए, और क्या वे चतुर्भुजों के कोणों के योग के बारे में अनुमान लगा सके? उनके अनुमान क्या थे? उन्होंने इन अनुमानों को किस तरह सही सिद्ध किया?

क्या चतुर्भुजों के कोणों के योग के गुणधर्म का प्रमाण विद्यार्थियों के लिए विश्वसनीय था? क्या उन्हें यह विश्वास हो गया कि यह गुणधर्म सभी चतुर्भुजों पर लागू होगा?

'n' भुजाओं वाले नियमित बहुभुजों के आंतरिक कोणों के योग के बारे में विद्यार्थियों ने कौन सी व्यवस्था/व्यवस्थाएं देखी थी/ थीं? क्या उन्हें यह एहसास हुआ कि यही नियम अनियमित बहुभुजों पर भी लागू किया जा सकता है? क्यों (विद्यार्थियों द्वारा दिए गए कारणों का उल्लेख करें)?

विद्यार्थियों ने अवतल बहुभुजों के कोणों के योग में कौन सी व्यवस्थाएं देखीं?

ऊपर उल्लिखित किसी भी कार्य में विद्यार्थियों द्वारा बनाई गई कुछ गलत व्यवस्थाओं/ अनुमानों का भी उल्लेख करें।

इस पाठ में विद्यार्थियों द्वारा किए गए जिओज़ेबा उपकरण के उपयोग के बारे में अपने कुछ अवलोकनों का उल्लेख करें।

### आत्मचिंतन

किसी चतुर्भुज के कोणों को मापते वक्त, क्या हर बार कोणों का योग ठीक 360 डिग्री रहा? कोणों का योग 360 डिग्री न होने पर क्या विद्यार्थियों ने आप से कोई सवाल किया? यदि हाँ, तो आपने उसका क्या जवाब दिया?

आप क्या सोचते हैं कि अनुमान लगाने का यह अभ्यास किस प्रकार ऊपर उल्लिखित अवधारणाओं (बहुभुज के आंतरिक कोणों का योग) को बेहतर ढंग से सीखने में विद्यार्थियों की मदद करेगा?

इन गतिविधियों को करते हुए क्या विद्यार्थी आपस में 'गणित' की चर्चा कर रहे थे? उनकी कुछ चर्चाओं को लिख लें। आप क्या समझते हैं कि विद्यार्थियों की इन आपसी चर्चाओं से आपको पढ़ाने में मदद मिलती है? आप इन चर्चाओं का इस्तेमाल अपने फायदे के लिए किस प्रकार करते हैं?

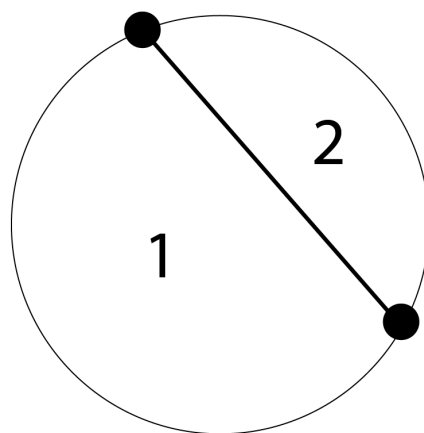
आप क्या सोचते हैं कि इस तरह की गतिविधियों में जिओज़ेबा का प्रयोग करना उपयोगी है? जिओज़ेबा के उपयोग से जुड़े लाभों और समस्याओं की सूची बनाएं।

## पाठ 13

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

विद्यार्थी एक वृत्त बनाएं और उस पर दो सुस्पष्ट बिन्दु बनाएं और फिर इन बिन्दुओं को मिलाकर बने क्षेत्रों की संख्या पर ध्यान दें। फिर यही प्रक्रिया वे 3, 4, 5 बिन्दुओं के साथ दोहराएं।

वृत्त पर बिन्दुओं की संख्या	2	3	4	5
पृथक क्षेत्रों की संख्या				



विद्यार्थी हर बार बने पृथक क्षेत्रों की संख्या गिनें और देखें कि क्या उन्हें बिन्दुओं की संख्या और उनसे बन रहे पृथक क्षेत्रों की संख्या के बीच कोई खास व्यवस्था/ संबंध दिखाई देते हैं। उन्हें क्या लगता है कि यह नियम वृत्त पर बिन्दुओं की कितनी भी संख्या के लिए सही होगा। उनसे उनके जवाब के कारण पूछें। विद्यार्थियों से कहें कि वे वृत्त पर बिन्दुओं की अलग-अलग संख्या के साथ इसकी पड़ताल करें, और अपने अवलोकनों के आधार पर, अगर जरूरत पड़े, तो अपने पहले दिए गए उत्तर को बदल दें। आप विद्यार्थियों से निम्नलिखित सवाल पूछ सकते हैं :

- सामान्य नियम से वे क्या समझे?
  - क्या किसी अनुमान को सिर्फ उदाहरण देकर सत्य सिद्ध किया जा सकता है? हमें कितने उदाहरण देना चाहिए? / किसी अनुमान को सत्य सिद्ध करने के लिए कितने उदाहरण काफी होते हैं?
  - हम कैसे मान सकते हैं कि हमारे उदाहरणों के कोई विपरीत उदाहरण नहीं होंगे?
  - हम किसी अनुमान को असत्य कैसे सिद्ध कर सकते हैं? इसके लिए हमें कितने विपरीत उदाहरणों की जरूरत होगी?
- आप उनसे यह भी पूछ सकते हैं कि उन्हें प्रमाण क्यों महत्वपूर्ण लगते हैं।

### स्मरणीय तथ्य

इस बात को समझने में विद्यार्थियों की मदद करें कि किसी अनुमान को सिर्फ उदाहरणों के आधार पर ही निर्णायक रूप से सत्य नहीं कहा जा सकता।

पहले कुछ उदाहरणों में, क्षेत्रों की संख्या  $2n-1$  है जहाँ  $n$  वृत्त पर बने बिन्दुओं की संख्या है। (इस बात से कोई दिक्कत नहीं है अगर विद्यार्थी चिन्हों वाले इस औपचारिक संकेतन के बजाय किसी व्यवस्था को व्यक्त करने के लिए भाषा का उपयोग करें और उसे 'नियम' की तरह व्यक्त करें)। लेकिन यह व्यवस्था  $n=6$  पर आकर गलत सिद्ध हो जाती है जो यह दिखाता है कि उदाहरणों द्वारा लगाया गया अनुमान जरूरी नहीं कि हमेशा सच हो। इससे विद्यार्थियों को इस तथ्य को समझने में मदद मिलती है कि किसी अनुमान को कितने भी उदाहरणों द्वारा सही सिद्ध नहीं किया जा सकता - अपने अनुमान को सही सिद्ध करने के लिए उन्हें निगमनात्मक तर्क देना जरूरी है।



## मेरे नोट्स

### छात्रों का प्रेक्षण

बिन्दुओं को मिलाने से बनी व्यवस्थाओं के बारे में विद्यार्थियों ने किस तरह के अनुमान लगाए? कम से कम दो अनुमानों को लिखें।

कितने विद्यार्थी यह दिखाने में सफल रहे कि यह व्यवस्था  $n=6$  ( $n$  वृत्त पर बिन्दुओं की संख्या है) पर आकर गलत सिद्ध हो जाती है? उन्होंने इसके पीछे क्या कारण बताए? कुछ कारणों की सूची बनाएं।

क्या विद्यार्थी जाँच और प्रमाण के बीच के अंतर को समझ गए? कैसे?

### आत्मचिंतन

आपको क्या लगता है कि विद्यार्थी प्रमाण की जरूरत को समझ गए? इसे दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण दें।

आपको क्या लगता है कि विद्यार्थियों के लिए प्रमाण की जरूरत को समझना क्यों जरूरी है?

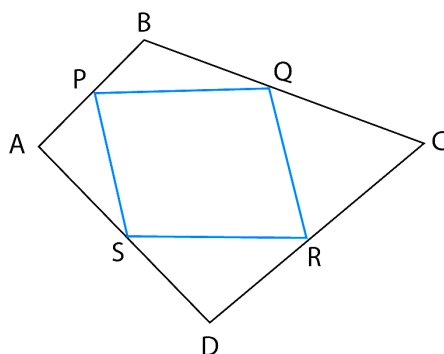
आपके विचार में, प्रमाण की जरूरत पर और अधिक जोर देने के लिए आप कौन सी अन्य गतिविधियां कर सकते हैं?

आप इस पाठ को पाठ्यपुस्तकों में दिए गए औपचारिक प्रमाणों से किस प्रकार जोड़ेंगे?

## पाठ 14

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

प्रमाण को औपचारिक ढंग से लिखने के तरीके को समझने में विद्यार्थियों की मदद करें। विद्यार्थियों से यह सिद्ध करने को कहें कि नीचे दिए गए चित्र में PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है, जहाँ P, Q, R और S, चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD और DA के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं :



विद्यार्थियों से अपने प्रमाण को समझाने, और कारण बताने को कहें। उनसे पूछें कि उन्होंने जो भी कथन किए हैं उनके बारे में वे आश्वस्त कैसे हैं, और उन्हें यह जानने में मदद करें कि सही सिद्ध हो चुके सभी कथनों की बुनियाद सूक्तियाँ और परिभाषाओं में होती है।

### स्मरणीय तथ्य

अपने कथनों और तर्कों के कारणों को व्यक्त करने में विद्यार्थियों की मदद करें। प्रमाण के तर्क को, और लिहाजा, गणित की निगमनात्मक प्रकृति को रेखांकित करें।

### छात्रों का प्रेक्षण

विद्यार्थियों द्वारा नमूने के रूप में प्रस्तुत किए गए किसी एक प्रमाण को लिखें।	
विद्यार्थियों द्वारा कौन सी सामान्य गलतियाँ की गईं? कुछ को लिखें।	

### आत्मचिंतन

आप क्या समझते हैं कि विद्यार्थियों को अपने ही प्रमाणों को लिखने में कठिनाई क्यों होती है?	
क्या आपको लगा कि इस कार्यविधि से ज्यामिती को समझने में विद्यार्थियों को मदद मिली? समझाएं।	

## पाठ 15

### कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय (45 मिनट)

विद्यार्थियों से समूहों में काम करने को, और यह पता लगाने को कहें, कि प्रस्तुत कथन सही हैं या गलत। उनसे समूहों में काम करते हुए, अपने उत्तरों को कक्षा के समक्ष प्रस्तुत करने को, और अपने उत्तरों को सही सिद्ध करने को कहें। विद्यार्थियों से पूछें कि

- वे कैसे इतने आश्वस्त हैं कि प्रस्तुत कथन सभी मामलों के लिए सही होगा? यानी वह सदैव सही ही होगा?
- उन्हें कैसे पता चलता है कि कोई कथन गलत है?

अगर किसी कथन विशेष को लेकर किन्हीं दो समूहों के बीच असहमति हो, तो उनसे आपस में बातचीत करके एक साझा निष्कर्ष निकालने को कहें। विद्यार्थियों/ समूहों के बीच होने वाली चर्चाओं के आधार पर, और कोई कथन हमेशा ही सही होगा इसके बारे में वे किस प्रकार दूसरों को विश्वास दिलाने की कोशिश करते हैं (क्या वे उदाहरणों का उपयोग करते हैं, या क्या वे तर्कों का उपयोग करते हैं), इसे देखते हुए आप समझ सकते हैं कि उन्होंने इस इकाई की अवधारणाओं को किस हद तक समझ लिया है।

आप दिए गए कथनों में कुछ नए कथन भी जोड़ सकते हैं।

### स्मरणीय तथ्य

इस गतिविधि का उद्देश्य इस इकाई के केन्द्र में स्थित विचारों के बारे में विद्यार्थियों की समझ का एक अनौपचारिक आकलन करना है। इन विचारों को थोड़े अलग संदर्भ में वे किस प्रकार लागू करते हैं इसे देखकर यह आकलन किया जाना है।

### छात्रों का प्रेक्षण

क्या किसी कथन विशेष के 'सत्य' के बारे में किन्हीं दो समूहों/ विद्यार्थियों में कोई असहमति थी? वे उस असहमति को दूर करके किस प्रकार एक साझा निष्कर्ष पर पहुँचे?

किसी कथन को 'सत्य' सिद्ध करने के लिए विद्यार्थियों द्वारा दिए गए तर्कों के कुछ उदाहरण दें।

किसी कथन को 'असत्य' सिद्ध करने के लिए विद्यार्थियों द्वारा दिए गए तर्कों के कुछ उदाहरण दें।

### आत्मचिंतन

क्या आपको लगता है कि यह गतिविधि विद्यार्थियों में निगमनात्मक तर्क करने की क्षमता विकसित करने में मदद करेगी? कैसे?

इस कार्यविधि को पूरा करने के बाद क्या आपको लगता है कि विद्यार्थी ज्यामिती के सिद्धांतों को समझाने में, उन्हें सही सिद्ध करने में, उनके बारे में अनुमान लगाने में और उन्हें व्यक्त करने में सक्षम हो गए हैं? क्या आपको लगता है कि आपके शिक्षण में इससे मदद मिलेगी?

क्या आप समझते हैं कि विद्यार्थी अपनी गलतियों से, और अन्य विद्यार्थियों की गलतियों से सीख रहे हैं? कुछ उदाहरण देकर

# NOTES

# NOTES



CONNECTED LEARNING INITIATIVE

सॅटर फॉर एजुकेशन, इनोवेशन एंड एक्शन रिसर्च,  
टाटा सामाजिक विज्ञान संस्थान,  
वी. एन. पूरव मार्ग, देवनार,  
मुंबई - 400088, भारत  
फोन : +91 022 25525003  
[clix.tiss.edu](http://clix.tiss.edu)