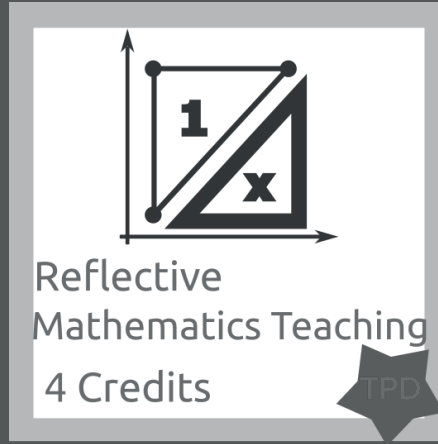




# स्नातकोत्तर प्रमाणपत्र आईसीटी युक्त विर्मशापूर्ण शिक्षण

S02 चिंतनशील गणित शिक्षण  
पुस्तिका



2017



CONNECTED LEARNING INITIATIVE

# गणित

आनुपातिक तर्क

# यह कार्यपुरितका मेरी है

नाम: यूजरनेम:

स्कूल: कक्षा:

CLix मॅथेमॅटिक्स का समूह

अरिंदम बोस

रुचि कुमार

आरती बापट

सौरभ खन्ना

श्वेता नैक (Consultant from HBCSE-TIFR)

## CLix (2017)

TISS/CEI&AR/CLix/HB (T)/8Jun'17/02

दी कनेक्टेड लर्निंग इनिशिएटिव (CLix) माध्यमिक स्कूल के विद्यार्थियों के लिए बनाई गई तकनीकी-युक्त पहल है। इस पहल का आरंभ टाटा ट्रस्ट्स ने किया था जिसमें टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ सोशल साइंसेज, मुंबई और मॅसॅच्युसेट्स इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी, केम्ब्रिज यह दो संस्थाएँ संस्थापक सहयोगी हैं।

## अन्य सहयोगी

सेंटर फॉर एज्युकेशन रिसर्च एण्ड प्रॉक्टिस – जयपूर, मिजोरम युनिवर्सिटी – ऐज़वाल, एकलव्य – मध्य प्रदेश, होमी भाभा  
सेंटर फॉर साइंस एज्युकेशन – मुंबई, नॅशनल इन्स्टिट्यूट ऑफ एडवॉन्सड स्टडीज – बेंगलुरु, स्टेट काउंसिल ऑफ  
एज्युकेशनल रिसर्च एण्ड ट्रेनिंग (एससीइआरटी) ऑफ तेलंगाना – हैदराबाद, टाटा क्लास एज – मुंबई,  
गवर्नमेंट ऑफ राजस्थान, गवर्नमेंट ऑफ मिजोरम, गवर्नमेंट ऑफ छत्तिसगढ़ एण्ड गवर्नमेंट ऑफ तेलंगाना  
इंटर उनिवर्सिटी फॉर एस्ट्रोनॉमी एंड एस्ट्रोफिजिक्स, पुणे

[www.clix.tiss.edu](http://www.clix.tiss.edu)

आपके मन में कोई सवाल, सुझाव या संदेह हो, तो आप वे हमें  
[contact@clix.tiss.edu](mailto:contact@clix.tiss.edu) इस इमेल पते पर भेज सकते हैं।

मुख्यपृष्ठ का डिज़ाइन : मनोज भंडारे

फॉर्मेटिंग : मिहिर मानकर

अनुवादक : डॉ. के. के. शर्मा



यह दस्तावेज क्रिएटिव कॉमन्स के तहत शेअर अलाईक ४.० लाईसेन्स द्वारा प्रकाशित किया गया है।

# सूची

उद्देश्य	46
आनुपातिक तर्क के मॉड्यूल का ढांचा	47
<b>इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक सोच</b>	49
अध्याय 1: जामुनी बाँटना सीखती है	49
अध्याय 2: आइए तुलना करें और वितरण करें	54
अध्याय 3: समूहों में हिस्सों को समान बनाना	57
<b>इकाई 2: गुणात्मक सोच</b>	61
अध्याय 1: कॉफी और दूध	62
अध्याय 2: जामुनी पहेलियाँ हल करती है	66
अध्याय 3: जामुनी बाज़ार जाती है	69
अध्याय 4: साहिर एक पोस्टर बनाता है	74
<b>इकाई 3: अनुपात और समानुपात</b>	76
अध्याय 1: अनुपात संकेतन समझना	77
अध्याय 2: जामुनी के साथ मानचित्र पढ़ना	80
अध्याय 3: पट्टियों का उपयोग कर लम्बाई ज्ञात करना	83
अध्याय 4: नींबूपानी में बर्फ़ के क्यूब	87
<b>इकाई 4: अनुप्रयोग</b>	90
अध्याय 1: एकघात समीकरणों और प्रायिकता में समानुपात	91
अध्याय 2: मिश्र अनुपात और समानुपात	94



# क्लक्स गणित

## आनुपातिक तर्क

सबसे आसान तरीके से कहें तो आनुपातिक तर्क का मतलब गुणात्मक चिंतन का इस्तेमाल करते हुए दो चीजों में तुलना करने तथा इसके बाद उसे नए हालातों में अमल में लाने की काबिलियत है।

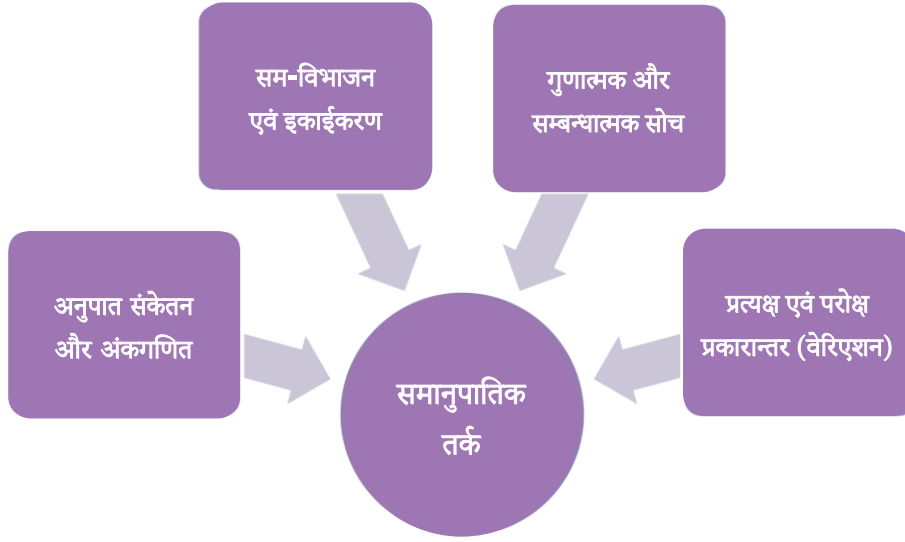
— नेशनल काउंसिल ऑफ टीचर्स ऑफ मैथमेटिक्स

आनुपातिक तर्क, स्कूली शिक्षा के दौरान शिक्षार्थियों में विकसित होने वाले महत्त्वपूर्ण गणितीय विचारों में से एक विचार है। यह परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़ी गुणात्मक अवधारणाओं के बारे में शिक्षार्थियों की समझ का एक अच्छा संकेतक है। साथ ही साथ, यह गणित के ज्यादा पेचीदा अवधारणाओं की नींव भी रखता है। आनुपातिक तर्क एक छतरीनुमा पद है, इसके दायरे में बहुत सारी अवधारणाओं से संबंधित चिंतन का तरीका आता है, जैसे, भिन्न से लेकर अनुपातों का बीजगणितीय प्रस्तुतीकरण, वेरियेशन और पैमानीकरण और संभाव्यता आदि। इस मार्गदर्शिका के संदर्भ में, आनुपातिक तर्क का मतलब है कि उपयुक्त हालातों में पैमाने को बढ़ा या घटा कर दर्शाने की काबिलियत तथा ऐसे संबंधों के लिए औचित्य उपलब्ध करवाना जिसमें सीधा यानी प्रत्यक्ष व उलटा वेरियेशन शामिल हों।

आनुपातिक तर्क पाठ्यचर्या के करीब करीब सभी क्षेत्रों में काम आता है और यह माध्यमिक गणित में कामयाबी के लिए एक महत्त्वपूर्ण अवधारणा मानी जाती है। लेकिन उनमें ऐसे मौके बहुत ही कम होते हैं, जहाँ पर शिक्षार्थियों के गुणात्मक तरीके से तर्क करने की काबिलियत विकसित करने के लिए, अनुपात तथा समानुपात के विचारों को सुसंगत तरीके से पाठ्यचर्या में गूँथा गया हो।

आनुपातिक तर्क पर क्लक्स गणित का मॉड्यूल इस पाठ्यचर्यात्मक खाई को पाटने की कोशिश करता है। इसमें सोच समझ कर गतिविधियों का इस्तेमाल किया गया है, जो कि या तो व्यावहारिक है या डिजिटली अंतर्क्रियात्मक है। इसमें आनुपातिक तर्क के विकास के अलग-अलग पड़ावों से गुजरना पड़ता है। इन पड़ावों को चार इकाइयों में व्यवस्थित किया गया है। यह मार्गदर्शिका इस बात को समझाती है कि शिक्षार्थियों में आनुपातिक तर्क विकास करने में, हरेक इकाई व उसमें दिए गए अध्याय किस तरह से मदद करते हैं। इसके साथ ही इनमें शिक्षार्थियों के सोचने के तरीकों के उदाहरणों पर भी चर्चा की गई है और इनमें से कुछ गतिविधियों पर संभावित गणितीय चर्चाओं को विस्तार से बताया गया है। ये उदाहरण डिजिटल तथा व्यावहारिक दोनों ही तरह की गतिविधियों के लिए दिए गए हैं, और अध्यापक इनका इस्तेमाल दोनों ही तरह की गतिविधियों में अपनी जरूरत के मुताबिक कर सकते हैं।

आनुपातिक तर्क
अनुपात की संकेतण पद्धति (यानी नोटेशन) तथा अंकगणित
बराबर हिस्सेदारी तथा इकाईकरण
गुणात्मक तथा संबंधपरक चिंतन
प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष वेरियेशन के संदर्भ



## उद्देश्य

आनुपातिक तर्क का माँड्यूल शिक्षार्थियों के सीखने के तीन पहलुओं को संबोधित करता है।

- योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की तरफ बढ़ना : शिक्षार्थियों को योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर बढ़ाना एक ऐसी चुनौती है, जिसका सामना विद्यालयी शिक्षा को करना पड़ता है।
- बराबर हिस्सेदारी तथा इकाईकरण : संबंधपरक तथा गुणात्मक चिंतन को विकसित करने के लिए मूल कौशल के तौर पर इकाई के आकार तथा उपयुक्त तरीके से बराबर हिस्सेदारी की समझ
- अनुपात तथा समानुपात वाले हालातों पर जवाब देना : शिक्षार्थियों के परिचित हालातों पर काम करना, जिनमें शिक्षार्थी मात्राओं पर गुणात्मक नजरिए से विचार करना सीखें।
- प्रत्यक्ष तथा विपरीत अनुपातों के गणितीय तथा संदर्भगत समझ को विकसित करना : शिक्षार्थी आनुपातिकता के स्थिरांक का मतलब समझें तथा प्रत्यक्ष तथा विपरीत आनुपातिक हालातों में आवा-जाही करें।
- आनुपातिक चिंतन को लागू करना : अनुपात की संकेतण पद्धति यानी नोटेशन का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थी संभाव्यता (प्रायिकता) तथा दूसरे गणितीय संदर्भों की समस्याएं हल कर पाएं।

## आनुपातिक तर्क के मॉड्यूल का ढांचा

	इकाई का नाम	विवरण	डिजिटल संसाधन
इकाई 1	योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर	इस इकाई का उद्देश्य शिक्षार्थियों के साथ संबंधपरक हालातों पर, एक खास तरह से सोचने के तरीकों पर काम करना है और योगात्मक हालातों के साथ परिचय की वजह से उनके सामने पैदा होने वाली दुविधाओं को उजागर करना है। अक्सर, योगात्मक हालातों पर बहुत ज्यादा काम करने की वजह से, शिक्षार्थी सभी हालातों को योगात्मक तरीके से ही सुलझाते हैं यानी डिकोड करते हैं। इस इकाई में, शिक्षार्थियों का सामना ऐसे हालातों से होगा, जिनमें योगात्मक चिंतन उन्हें खाने के डिब्बों की गैर-बराबर हिस्सेदारी/बंटवारे की तरफ धकलेगा। शिक्षार्थी बराबर हिस्सेदारी जैसे विचारों के बारे में सीखेंगे, जिनमें वे उपयुक्त संख्या में टुकड़े करने या खाने के डिब्बों की इकाई के आकार का पता लगाएंगे ताकि हरेक कर्मचारी को बराबर मात्रा में खाना मिल सके। जब शिक्षार्थी व्यक्तियों के बजाय समूहों में हिस्सों को बांटते हैं तब उन्हें गुणात्मक तौर पर समूह के हिस्से के बारे में सोचने की जरूरत पड़ती है।	इस इकाई में बराबर हिस्सेदारी/बंटवारे के लिए डिजिटल संसाधन दिए गए हैं। कटिंग टूल(cutting tool) यानी काटने का औजार शिक्षार्थियों में इस बात को बढ़ावा देते हैं कि वे एक पूरे के हिस्सों की संख्या के बारे में सोच सकें, और ग्रुपिंग टूल (grouping tool) यानी समूहीकरण का औजार समूहीकरण की कार्य-नीतियों को काम में लेने में मदद करता है। ये औजार भिन्नो के दृश्यात्मक चित्रों को उनके संख्यात्मक प्रारूप से जोड़ने का मौका मुहैया करवाते हैं। संदर्भ, प्रस्तुतीकरण तथा संख्याओं का चयन शिक्षार्थियों को इस नतीजे तक पहुंचाने के लिए किया गया है कि योगात्मक चिंतन सभी हालातों में काम नहीं करता और कुछ हालात आनुपातिक या गुणात्मक होते हैं।
इकाई 2	गुणात्मक चिंतन	इस इकाई में, शिक्षार्थी ज्यामिति से जुड़े गुणात्मक हालातों पर काम करते हैं। वे पैटर्न से जुड़े कामों पर काम करते हैं। वे पैटर्न के कार्यों पर काम करेंगे जिसमें वे पैटर्न का दृश्यात्मक प्रस्तुतीकरण एक समान रखते हुए पैमाने के आधार पर पैटर्न को बनाते हैं। यह इकाई शिक्षार्थियों के सामने दो आयामी संदर्भों में पैमाने के गुणक के विचार रखती है। वे आयताकार पैटर्न को बड़ा करते या सिकोड़ते हैं और उस पैटर्न में होने वाले संख्यात्मक बदलाव का पता लगाते हैं।	इस इकाई के डिजिटल संसाधन शिक्षार्थी को इस बात का मौका देते हैं कि वे पैटर्नों को पैमाने के आधार बनाएं व सिकोड़ें ताकि पैटर्न का दृश्यात्मक प्रस्तुतीकरण एक समान रहे। इन अभ्यासों पर किया जाने वाला तर्क बहुपरती होता है, इसलिए शिक्षार्थियों को पैटर्न में बिंदुओं की संख्या तथा पूरे पैटर्न पर एक साथ ध्यान देना पड़ता है। स्तम्भ तथा पंक्तियों को जोड़ने वाली डिजिटल इंटरफेस तथा बिंदुओं वाली पैलेट यानी पट्टी इस तर्क में मदद करती है।



इकाई 3	अनुपात की संकेतण-पद्धति (यानी नोटेशन)	इस इकाई में शिक्षार्थियों की पिछली इकाइयों में बनी समझ को अनुपात की औपचारिक संकेतण-पद्धति के साथ जोड़ा गया है। अनुपात की संकेतण-पद्धति, भिन्नों की संकेतण-पद्धति वाला प्रारूप ही इस्तेमाल करते हैं और इसीलिए यह ज्यादा जरूरी हो जाता है कि अनुपात की संकेतण-पद्धति के प्रतीकात्मक जोड़-तोड़ पर काम करके उसकी अंकगणित को भिन्नों की अंकगणित से अलग किया जाए।	इस इकाई में, शिक्षार्थी एक डिजिटल कार्य करते हैं, जिसमें आयतन पर काम करना शामिल है। इसका उद्देश्य शिक्षार्थियों में अनुपात के स्थिरांक का विचार बनाने में मदद करना है। डिजिटल इंटरफेस शिक्षार्थियों को इस बात का मौका मुहैया करवाता है कि वे अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों को मिला कर अपना पेय पदार्थ को ठंडा बना सके। फिर से, चूंकि इस काम में बहुपरती तर्क करना शामिल है, इसलिए अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों के डिजिटल इंटरफेस तथा गिलास में भरे द्रव्य के आयतन के बदलाव में लचीलापन, पेचीदे तर्क को करने में शिक्षार्थियों की मदद करता है।
इकाई 4	अनुप्रयोग यानी एप्लीकेशन	यह इकाई मध्यवर्ती इकाई की तरह काम करती है और यह वैकल्पिक है। इसका प्रमुख जोर आनुपातिक तर्क का गणित के दूसरे क्षेत्रों जैसे सरल रेखीय समीकरण, संभाव्यता, मिश्र अनुपात तथा वेरियेशन आदि में इस्तेमाल करना है।	इस इकाई में किसी भी तरह का डिजिटल संसाधन प्रयुक्त नहीं हुआ है। लेकिन यह मार्गदर्शिका, कक्षा में चर्चा तथा दूसरी गतिविधियों के लिए कुछ कार्यनीतियां मुहैया कराती है।

### इस मार्गदर्शिका का इस्तेमाल करना

यह मार्गदर्शिका आनुपातिक तर्क के माइयूल की चारों इकाइयों के हरेक अध्याय का संक्षेप में एक विहंगमावलोकन मुहैया करवाती है। मार्गदर्शिका के हरेक भाग में माइयूल के एक अध्याय पर चर्चा की गई है और उस अध्याय में से कुछ उदाहरण लेकर उन पर विस्तार से चर्चा की गई है। उन उदाहरणों के संदर्भ में शिक्षार्थियों की बहुत सारी कार्यनीतियों पर चर्चा की गई है। व्यावहारिक अध्यायों के लिए, अध्यापकों को हैंडआउट अध्यायों को पहले से अच्छे से पढ़-समझ लेना चाहिए तथा शिक्षार्थियों के चिंतन के पूर्वानुमानों पर की गई चर्चाओं के आधार पर सामग्री तथा शिक्षाशास्त्रीय कार्यनीतियां भी तैयार कर लेनी चाहिए।

## इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर

### अध्याय 1: जामुनी ने सीखा साझा करना

#### इकाई का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

आनुपातिक तर्क यह जानने का एक बेहतर संकेत है कि शिक्षार्थी ने परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़े गुणात्मक संबंधों की समझ हासिल की है या नहीं। इसी के साथ-साथ, यह गणित के ज्यादा पेचीदी अवधारणाओं की बुनियाद भी रखता है। गुणात्मक चिंतन की प्रक्रियाएं ऐसे हालातों से संबंधित होती हैं जिनमें न्यायपूर्ण बंटवारा करना, पैमानीकरण, सिकोड़ना, नकल करना तथा घात के तौर पर बढ़ाना होता है। बराबर हिस्सेदारी तथा न्यायपूर्ण बंटवारे से संबंधित शिक्षार्थियों के विचारों को मजबूत करने से शुरुआत करते हुए यह इकाई ऐसे हालातों में गुणात्मक चिंतन को संबोधित करती है जिनमें भिन्न के ज्ञान की जरूरत पड़ती है। इसके साथ-साथ उदाहरणों का चयन भी इस तरह से किया गया है कि वे गुणात्मक तथा योगात्मक चिंतन के बीच के टकराव को आगे बढ़ाएं। इसलिए यह इकाई किसी भी तरह के गुणात्मक चिंतन को विकसित करने की नींव रखती है।

#### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे:

- समूहों के बीच में तथा समूहों के अंदर दी गई मात्राओं में तुलना करके योगात्मक तथा गुणात्मक संबंधों में अंतर करना।
- एक समूह में हरेक व्यक्ति के हिस्से के बारे में निर्णय करने के संदर्भ में प्रासंगिक मात्राओं के बीच गुणात्मक संबंधों की पहचान करना।
- किसी खास समूह के एक सदस्य के हिस्से के साथ जोड़ते हुए बड़े अनुपात को पहचान कर, दो अलग-अलग हिस्सेदारी करने के हालातों में अनुपातों की तुलना करना।
- मात्राओं के बीच गणितीय संबंधों के आधार पर उनके घटने या बढ़ने के बारे में निर्णय लेना तथा उन निर्णयों के कारण बताना।

## इकाई का विवरण

क्र.	अध्याय का नाम	अध्याय का प्रकार	अध्याय का विवरण
1	जामुनी ने सीखा साझा करना	डिजिटल अध्याय	शिक्षार्थी इस अध्याय में न्यायपूर्ण तथा बराबर बंटवारे की अवधारणा समझेंगे। वे कटिंग टूल का इस्तेमाल यह पक्का करने के लिए करेंगे कि केक को अलग-अलग हिस्सों में कैसे काटा जा सकता है और उसे व्यक्तियों की समान संख्या में अलग-अलग तरीकों से कैसे बांटा जाता है। इन समस्याओं में शिक्षार्थियों को कटे हुए टुकड़ों का संबंध भिन्नात्मक प्रस्तुतीकरण के साथ जोड़ना पड़ता है और एक व्यक्ति को मिलने वाला हिस्सा पहचानने के लिए उसे मिलने वाले सभी टुकड़ों को मिलाना पड़ता है।
2	तुलना करना तथा बाँटना	डिजिटल अध्याय	इसमें शिक्षार्थी समूहों के बीच परांठे बांटने के लिए गुपिंग टूल का इस्तेमाल करना सीखेंगे। वे अपने भिन्नो के ज्ञान का इस्तेमाल करते हुए हरेक व्यक्ति को मिले खाने के अनुपात की तुलना करेंगे। इसमें शिक्षार्थी, खाने की सभी चीजों की हिस्सेदारी/बंटवारे के हालातों में बराबर अनुपात हासिल करने के लिए, मात्राओं तथा मात्राओं के बीच संबंधों के बारे में तर्क करेंगे।
3	समूहों के बीच में बराबर साझा करना	डिजिटल अध्याय	इसमें शिक्षार्थी बराबर अनुपात के हालातों में कीमत का पता लगाना सीखेंगे। वे खाने को व्यक्तियों में बांटने के बजाय व्यक्तियों के समूह में बाँटेंगे। यह काम एक बार फिर शिक्षार्थियों को गुणात्मक तर्क का इस्तेमाल करने का मौका मुहैया करवाएगा।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय रास्ते (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग मुहैया करवाते हैं।

## काम और गणितीय प्रासंगिकता

## शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां

**गतिविधि-1:** इस गतिविधि का मकसद शिक्षार्थियों को कटिंग टूल यानी काटने के औजार से परिचित करवाना तथा भिन्नात्मक मात्राओं का मतलब समझने में मदद करना है। यहां पर शिक्षार्थी तीन केकों को न्यायपूर्ण तरीके से काट कर चार बच्चों में बांटते हैं। कुछ खास शब्दावली जैसे, हिस्सा और न्यायपूर्ण हिस्सा आम बोलचाल में भी काम में लिया जाता है इसलिए इन पर खास तौर पर ध्यान देने की जरूरत है। न्यायपूर्ण हिस्से का मतलब, आम बोलचाल में जरूरतमंद को ज्यादा आवंटन करना होता है। लेकिन, गणितीय तौर पर न्यायपूर्ण का मतलब हरेक के एक समान मात्रा देना होता है। यहां पर गणितीय मतलब का इस्तेमाल किया गया है। तोड़ना या समान हिस्सेदारी करना एक केन्द्रीय कौशल है जो गुणात्मक चिंतन की बुनियाद रखता है, और यही वजह है कि हमने यहां पर इस पर अपना ध्यान केन्द्रित किया है। इसीलिए, बराबर हिस्से करते वक्त शिक्षार्थियों का ध्यान केक के आकार की तरफ दिलाया गया है।

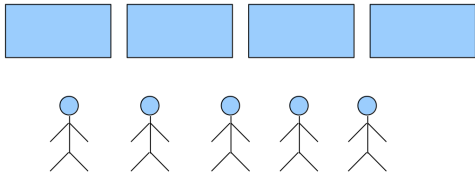
शिक्षार्थी असली दुनिया में हिस्सेदारी/बंटवारे से परिचित होते हैं, और इसीलिए यह गतिविधि उन्हें इस बात का मौका मुहैया करवाती है कि वे गणितीय काम-काज करने के अपने तरीकों का मेल औपचारिक गणितीय अभ्यासों के साथ कर पाएं। शिक्षार्थियों के कुछ संभावित जवाबों के साथ किए जाने वाले शिक्षाशास्त्रीय काम नीचे सुझाए गए हैं।

अ. आधे या चौथाई की मदद से बांटना/हिस्से करना : जब भी हिस्सेदारी का मामला हमारे सामने आता है हम किसी भी चीज के आधा या चौथाई करने के आदी होते हैं। शिक्षार्थी भी यही करेंगे। इसमें हमारे पास इन सवालियों को पूछने का मौका होता है : उन्हें कुल कितने आधे या चौथाई मिले ? हरेक बच्चे को न्यायपूर्ण बंटवारे/हिस्सेदारी के बाद कितने आधे या चौथाई मिले ? क्या आधे या चौथाई करना हमेशा एक अच्छी कार्यनीति होती है ? किन हालातों में आधे व चौथाई करना काम नहीं आयेगा ? अगर आप केक के छोटे या बड़े हिस्से करते हैं तो हरेक व्यक्ति के हिस्से पर क्या असर पड़ेगा ?

ब. गैर-बराबर हिस्सेदारी : यह भी मुमकिन है कि शिक्षार्थी किसी एक पूरे को हरेक बच्चे में बांटना शुरू करें और अंत तक उन्हें गैरबराबर टुकड़ों में बांट दें। ऐसे मामलों में, अध्यापक उनके साथ इस बात पर चर्चा करें कि कटिंग टूल उन्हें क्या करने की इजाजत देता है। यहां पर इस बात की भी चर्चा करें कि, कैसे किसी एक पूरे के हिस्सों की इकाई का आकार छोटा करने पर, उसके कुल हिस्सों की संख्या बढ़ जाती है। किसी भी इकाई का छोटा आकार, कैसे किसी एक पूरे के, हिस्सों की संख्या बढ़ा देता है।

**गतिविधि-2:** इस गतिविधि का मकसद शिक्षार्थियों को गुपिंग टूल यानी समूहीकरण के औजार से परिचित करवाना है। इस काम में शिक्षार्थियों को पहले हिस्से के आकार की कल्पना करनी है और फिर अपने जवाब को प्रमाणित करने के लिए हकीकत में समूहीकरण करके हिस्से का पता लगाना है।

रोजमर्रा की जिंदगी में बराबर-हिस्से का विचार समूहीकरण के साथ जुड़ा रहता है। व्यस्क के तौर पर, किसी चीज की एक इकाई की कीमत जानने से पहले हम एक आधे या एक चौथाई की कीमत का पता लगाने के आदी होते हैं। हम हमेशा एक हिस्से की कीमत जानने की कोशिश नहीं करते बल्कि हिस्सों के जत्थे/झुंड की कीमत का पता लगाने की कोशिश करते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम 12 अंडों की कीमत जानते हों और हमें 3 अंडों की कीमत का पता लगाना हो तो पहले हम 6 अंडे (कुल अंडों के आधे) की कीमत निकालते हैं, फिर उसका आधा करके 3 अंडों की कीमत का पता लगा लेते हैं। हालांकि, पाठ्यपुस्तकीय तौर तरीके हमेशा हमें यह सुझाते हैं कि पहले एक चीज की कीमत का पता लगाने के बाद कई सारी चीजों की कीमत निकालनी चाहिए। इस काम की बुनियाद ऐसे ही समूहीकरण के कौशलों पर रखी गई है। अध्यापक अपनी चर्चा

	<p>को समतुल्यता बनाए रखने के इर्द गिर्द केन्द्रित रख सकते हैं। जब व्यक्ति दो समूह बनाते हैं, तब पूरे का आधा किया जाता है और हरेक समूह के लिए लिया गया केक, पूरे समूह के लिए लिए गए केक का आधा होगा।</p>
<p><b>गतिविधि-3:</b> चूंकि पिछली गतिविधियों में शिक्षार्थी कटिंग तथा ग्रुपिंग के औजारों का इस्तेमाल कर चुके हैं, इसलिए यह गतिविधि उससे एक कदम आगे बढ़ती है, जिसमें शिक्षार्थी केक को एक से ज्यादा तरीकों से काटते हैं तथा हरेक व्यक्ति के हिस्से को जोड़ना सीखते हैं।</p>	<p>इसमें काम में लिया गया तरीका गतिविधि-1 के तरीके जैसा ही है जिसमें हिस्सेदारी सरल भिन्न में नहीं है। हालांकि, चुनी हुई संख्याएं केक के संभावित वितरण की इजाजत देती है, और सबसे महत्वपूर्ण बात यह है कि उसमें से किसी को भी आधे या चौथाई के हिस्से करके नहीं हासिल किया जा सकता है। यह गतिविधि जानबूझ कर एक खास मक्सद से पहली गतिविधि से एकदम विपरीत बनाई गई है। अगर जरूरत हो तो, अध्यापक नीचे दिया गया रेखाचित्र बना सकते हैं और अलग-अलग इकाई के आकारों के आधार पर अलग-अलग तरह से हो सकने वाली हिस्सेदारी पर चर्चा कर सकते हैं।</p> 
<p><b>गतिविधि-4:</b> यह एक अकेली गतिविधि है जिसमें खाना बांटने के दो हालात योगात्मक तौर पर गैर-बराबर नजर आते हैं लेकिन वे हालात गुणात्मक तौर पर बराबर हैं।</p>	<p>ऐसे शिक्षार्थी जो अभी भी इस हालात को योगात्मक तरीके से समझते हैं वे इसे गैर-बराबर ही समझेंगे। हालांकि, चौथाई हिस्से में बांटने से वे इस बात को समझ पाते हैं कि हरेक व्यक्ति का हिस्सा कितना है। शिक्षार्थियों को इन चीजों को बांटने के तरीकों की सावधानीपूर्वक खोजबीन करनी पड़ेगी। जैसा कि गतिविधि 1 में दिखाया गया है कि शिक्षार्थी आधों से शुरू कर सकते हैं और उसके बाद चौथाई में बांट सकते हैं। जैसे जैसे संख्याएं थोड़ी बड़ी होती जाएंगी, इस तरीके में ज्यादा वक्त लगने लगेगा। अध्यापक इस गतिविधि में समूहीकरण की कार्यनीति का इस्तेमाल करने पर चर्चा शुरू कर सकता है। 12 कर्मचारियों के लिए 9 पराठों को 4 व्यक्तियों के तीन समूह तथा हरेक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है। इसी तरह, 8 व्यक्तियों के लिए 6 पराठों को 4-4 व्यक्तियों के 2 समूह तथा हरेक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है।</p>
<p><b>गतिविधि-5:</b> यह इस अध्याय का आकलन है, इससे हमें यह समझने में मदद मिलेगी कि शिक्षार्थियों इन गतिविधियों से कितना सीखा है</p>	<p>शिक्षार्थियों को अपने आप काम करने दें। कक्षा में चारों तरफ घूमते हुए शिक्षार्थियों द्वारा अपनाई जा रही कार्यनीतियों पर नजर रखें।</p>

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

1. एक ऐसी कार्यनीति का पूर्वानुमान लगाइए, जिसे आपके शिक्षार्थी शायद आपकी कक्षा में गतिविधि-1 तथा 3 के लिए इस्तेमाल करें। ऐसे सवालों की सूची बनाइए जिन्हें आप उस कार्यनीति के बारे में पूछना चाहेंगे।
2. गतिविधि-4 के लिए, सभी संभावित बांटने के तरीकों(सही या गलत) का पता लगाएं, जिन्हें शिक्षार्थी हरेक समूह को केक बांटते वक्त काम में ले सकते हैं।
3. सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
  - इस अध्याय पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों(सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

## इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर

### अध्याय 2: तुलना करना तथा बांटना

#### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

इस अध्याय में, शिक्षार्थी क्षेत्रफल मॉडल की मदद से बराबर हिस्सेदारी के जरिए न्यायपूर्ण बंटवारे के विचार पर काम करना जारी रखेंगे। वे कर्मचारियों के बीच खाने के डिब्बों को इस तरह से बांटने में जमुनी की मदद करेंगे कि हरेक को बराबर मात्रा में खाना मिल सके। गोल या आयताकार आकार के खाने के डिब्बे शिक्षार्थियों को उन्हें बराबर हिस्सों में बांटने का मौका मुहैया करवाते हैं। शिक्षार्थी दृश्य का इस्तेमाल करते हुए, क्षेत्रफल को बांट कर खाने के डिब्बों को बराबर हिस्सों में बांटना सीखते हैं। इस अध्याय में, जामुनी अपने अभिभावकों के काम करने की जगह पर जाती है और बराबर हिस्सेदारी से जुड़ी, खुद की समझ का इस्तेमाल खाने के डिब्बों को कर्मचारियों के बीच बांटने में करती है। यहां पर जामुनी यह पहचान जाती है कि भवन निर्माता और कुछ दूसरे व्यक्ति योगात्मक तर्क का इस्तेमाल कर रहे हैं, जो कि गलत हैं। इसके बाद, शिक्षार्थी अनुपात व उनकी आपसी तुलना को समझने के लिए दो समूहों में

#### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- दी गई मात्रा को काटने के औजार (यानी कटिंग टूल) की मदद से समूहों में बांटना।
- किसी खास समूह और उसके सदस्यों के साथ जुड़े हुए सबसे बड़े अनुपात को पहचान कर, हिस्सेदारी करने के दो अलग-अलग हालातों में अनुपातों की तुलना करना
- मात्राओं के बीच गणितीय संबंधों के आधार पर मात्रा में बढ़त या घटत के बारे में निर्णय लेना और उन निर्णयों के लिए तर्क देना।
- हमेशा योगात्मक ढंग से न समझ कर, जरूरत पड़ने पर हालातों को गुणात्मक ढंग से समझना

#### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी रास्ता या ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

#### काम और उसकी गणितीय प्रासंगिकता

**गतिविधि-1:** एक भवन निर्माता, व्यक्तियों तथा खाने के डिब्बों वाले इस सवाल में योगात्मक संबंधों का इस्तेमाल करता है और इस नतीजे पर पहुंचता है कि ५ व्यक्तियों में बांटे गए ४ पराठे और ६ व्यक्तियों में बांटे गए ५ पराठे, दोनों ही एक समान या समकक्ष हालात होते हैं। चूंकि व्यक्तियों तथा चीजों की संख्या, दोनों ही मामलों में अंतर १ का होता है, इसलिए यह एक आम तौर पर की जाने वाली गलती होती है। हमें यह याद रखना चाहिए कि दो मात्राओं में अंतर निकालना, उस हालात को योगात्मक नजरिए से देखने का तरीका है। इस अध्याय में हमारा साफ-साफ लक्ष्य यह है कि शिक्षार्थियों को हालातों को गुणात्मक ढंग से समझने के लिए प्रशिक्षित किया जाए।

#### शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां

अ. एक परांठा कम : हरेक समूह में, पराठों की संख्या उस समूह के सदस्यों की संख्या से सिर्फ एक कम है। योगात्मक तरीके से, ये दोनों हालात समकक्ष, यानी एक समान हैं, लेकिन इसका यह मतलब कतई नहीं है कि उस समूह के हरेक कर्मचारी को पराठों का एक समान हिस्सा मिलेगा। चलिए हम मान लेते हैं कि दो समूहों में क्रमशः  $m$  और  $n$  व्यक्ति हैं।

अब उन व्यक्तियों में पराठे बांटने का मतलब यह है कि हरेक को पूरे पराठे से थोड़ा सा कम मिलेगा, और यह जो हरेक को थोड़ा सा कम पराठा मिला है, उन सभी को अगर मिला दें तो एक पूरा परांठा बन जाएगा। जब  $m - 1$  पराठे को  $m$  व्यक्तियों के बीच बांटा जाता है तो हरेक

	<p>व्यक्ति को 1 पराठे से थोड़ा कम पराठा मिलता है, हम कह सकते हैं कि उसे <math>1/m</math> पराठा कम मिलता है। इसी तरह से <math>n</math> व्यक्तियों के समूह में यही तर्क लागू होगा और हरेक व्यक्ति को <math>1 - 1/n</math> पराठा कम मिलेगा।</p> <p>लेकिन, चूंकि <math>m \neq n</math>, <math>(1 - 1/m) \neq (1 - 1/n)</math>, इसलिए, भले ही योगात्मक तौर पर दोनों हालात समकक्ष प्रतीत हों लेकिन वे गुणात्मक तौर पर समकक्ष नहीं हैं और दोनों समूहों में से एक समूह में से हरेक का हिस्सा दूसरे समूह के व्यक्तियों के हिस्सों के बराबर नहीं है।</p>
<p><b>गतिविधि-2:</b> यह गतिविधि भी पहली गतिविधि जैसी ही है और उसी तर्क पर आधारित है। इसमें पराठों की संख्या हरेक समूह में कर्मचारियों की संख्या से 3 कम है।</p>	<p>एक बार फिर से, शिक्षार्थी दो हालातों के बीच गैरबराबरी का पता लगाने के दो तरीके हैं।</p> <p>अ. हिस्से का पता लगाना : काटने के औजार (यानी कटिंग टूल) की मदद से शिक्षार्थी हरेक समूह के हरेक कर्मचारी के हिस्से का पता लगा सकते हैं। इसके बाद, मापने के औजार (यानी मेज़र टूल) से शिक्षार्थी यह पता लगा सकते हैं कि दोनों बराबर नहीं हैं।</p> <p>काटने के अलग-अलग संभावित तरीकों में पराठों को यह जानने के लिए आधा या चौथाई करना शामिल है कि हरेक को एक आधा मिलेगा और बाकी 4 आधे उनके बीच बांटे जाने के लिए बचे रहेंगे (5 पूरे में 10 आधे) जबकि 6 व्यक्तियों के समूह में हरेक व्यक्ति को सिर्फ एक आधा ही मिलेगा।</p> <p>ब. अंतर को बांटना : इस कार्यनीति को डिजिटल औजार से इस्तेमाल नहीं लिया जा सकता है लेकिन इसे सोचने में काम लिया जा सकता है। हरेक हालात में, व्यक्तियों की संख्या सं 3 पराठे कम होंगे। यह बचे हुए तीन पराठे 8 व्यक्तियों और 6 व्यक्तियों पर अलग-अलग गुणात्मक असर डालेंगे, भले ही उनके बीच का योगात्मक असर समान हो। [गतिविधि 1 में की गई चर्चा को पढ़ें।]</p>
<p><b>गतिविधि-3:</b> यह दूसरे कामों की तुलना में सबसे सीधा सादा काम है। इसमें एक समूह में उसके सदस्यों की संख्या की तुलना में एक पराठा ज्यादा है तो दूसरे समूह में एक पराठा कम है। यह हालात योगात्मक तरीके से भी गैर-बराबर है। गणितीय तौर पर, यह एक सीधी सादी समझ है कि एक पूरे से थोड़ा सा ज्यादा एक पूरे से थोड़े से कम से हमेशा ही ज्यादा होगा।</p>	<p>हो सकता है कि शिक्षार्थी सिर्फ दोनों संख्याओं में 1 का अंतर देखें, लेकिन हमें उन्हें इस बात को समझने के लिए प्रशिक्षित करना है कि ये हालात गुणात्मक संदर्भ में गैर-बराबर हैं। इसके लिए इस्तेमाल किए जाने वाले अलग-अलग सुराग कुछ इस तरह के हो सकते हैं :</p> <p>i. पराठों की संख्या व्यक्तियों की संख्या से ज्यादा है। इस बात का क्या मतलब है ?</p> <p>ii. पराठों की संख्या व्यक्तियों की संख्या से कम है। इस बात का क्या मतलब हो सकता है ?</p> <p>iii. अंश के ज्यादा होने या हर के बड़े होने के संबंध में पहले से सीखे गए नियमों का हवाला दें। मात्राओं के संदर्भ में इसका हकीकत में क्या मतलब होता है ?</p>



	<p>iv. क्या इसका मतलब यह होता है कि सभी साधारण भिन्न (जिसमें अंश हर से छोटा होता है) हमेशा एक पूरे से छोटा होता है ?</p> <p>v. सबसे बड़े साधारण भिन्न का पता लगाएं।</p>
<p><b>गतिविधि-4:</b> यह एक अकेली गतिविधि है जिसमें खाना बांटने के दो हालात योगात्मक तौर पर गैर-बराबर नजर आते हैं लेकिन वे हालात गुणात्मक तौर पर बराबर हैं।</p>	<p>ऐसे शिक्षार्थी जो अभी भी इस हालात को योगात्मक तरीके से समझते हैं वे इसे गैर-बराबर ही समझेंगे। हालांकि, चौथाई हिस्से में बांटने से वे इस बात को समझ पाते हैं कि हरेक व्यक्ति का हिस्सा कितना है। शिक्षार्थियों को इन चीजों को बांटने के तरीकों की सावधानीपूर्वक खोजबीन करनी पड़ेगी। जैसा कि गतिविधि 1 में दिखाया गया है कि शिक्षार्थी आधों से शुरू कर सकते हैं और उसके बाद चौथाई में बांट सकते हैं। जैसे जैसे संख्याएं थोड़ी बड़ी होती जाएंगी, इस तरीके में ज्यादा वक्त लगने लगेगा। अध्यापक इस गतिविधि में समूहीकरण की कार्यनीति का इस्तेमाल करने पर चर्चा शुरू कर सकता है। 12 कर्मचारियों के लिए 9 पराठों को 4 व्यक्तियों के तीन समूह तथा हरेक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है। इसी तरह, 8 व्यक्तियों के लिए 6 पराठों को 4-4 व्यक्तियों के 2 समूह तथा हरेक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है।</p>
<p><b>गतिविधि-5:</b> यह इस अध्याय का आकलन है, इससे हमें यह समझने में मदद मिलेगी कि शिक्षार्थियों इन गतिविधियों से कितना सीखा है</p>	<p>शिक्षार्थियों को अपने आप काम करने दें। कक्षा में चारों तरफ घूमते हुए शिक्षार्थियों द्वारा अपनाई जा रही कार्यनीतियों पर नजर रखें।</p>

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- योगात्मक तथा गुणात्मक हालातों के बीच अंतरों के बारे में आप क्या समझते हैं, बताएं।
- क्या आप दो ऐसे हालातों के बारे में बता सकते हैं जो गुणात्मक तौर पर बराबर हों और योगात्मक तौर पर भी बराबर हों ? अपनी प्रकिया का वर्णन करें।
- भिन्न क्या हैं ? वे अनुपात के समान या उससे अलग कैसे होते हैं ?

गतिविधि 1 और 2 के लिए शिक्षार्थियों द्वारा इस्तेमाल की जाने वाली कम से कम एक कार्यनीति बताइए।  
हरेक कार्यनीति पर अपनी राय दीजिए।

## इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर अध्याय 3: समूहों के बीच बराबर हिस्सेदारी करना

### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

इस डिजिटल इकाई की डिजाइन इस तरह से की गई है कि इसमें शिक्षार्थी खाने के डिब्बों को कर्मचारियों के बीच बांटने में जामुनी की मदद करेंगे ताकि हरेक व्यक्ति को खाने की बराबर मात्रा मिल सके। गोलाकार या आयताकार खाने के डिब्बे शिक्षार्थियों को इस बात के मौके देंगे कि वे उन्हें बराबर आकार में काट सकें। इस अध्याय में, शिक्षार्थी गुणात्मक तौर पर समतुल्य हालातों को गढ़ने में जामुनी की मदद करेंगे। एक दृश्य के तौर पर समझें तो हम कह सकते हैं कि वे दिए गए डिब्बों के क्षेत्रफल को बराबर हिस्सों में बांटना सीखेंगे। अध्याय 2 में वे यह सीखेंगे कि दो हालात समतुल्य यानी आपस में एक समान हैं या नहीं। यह अध्याय इसी समझ पर आधारित है और अनुपात की समझ की दिशा में एक कदम और आगे बढ़ाता है।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- समान अनुपात के हालातों में कीमतों का पता लगाना।
- समूहीकरण की कार्यनीति पर जोर देते हुए गुणात्मक तर्क को लागू करना।
- व्यक्तियों के हिस्से पता करने के विचार को व्यक्तियों के समूहों के हिस्से पता करने के विचार तक फैलाना।
- दिए गए हालातों में समान अनुपात में हिस्से करने के लिए सवाल को डिजाइन करना।
- समान अनुपात के हालातों को गढ़ने के लिए सोचने के तरीकों का विकास।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी रास्ता या ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

काम और गणितीय प्रासंगिकता	शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां
<p><b>गतिविधि-1:</b> जामुनी को 4 व्यक्तियों के बीच 3 पराठों का बराबर बंटवारा करना है और इसी के समतुल्य बंटवारा करके यह पता लगाना है कि 12 कर्मचारियों को कितने पराठे मिलेंगे। गणितीय तौर पर यह समस्या, आनुपातिक जोड़ों में चौथी अज्ञात राशि का पता लगाने जैसा ही है। यहां पर संदर्भ के साथ दिए गए उदाहरण इस बात को दर्शाते हैं कि इन आनुपातिक संख्याओं का हकीकत में क्या मतलब होता है।</p>	<p>हम समतुल्य हालातों का पता लगाने के लिए दो तरीकों से तर्क कर सकते हैं। <b>हिस्सेदारी करना :</b> एक तरीका यह है कि एक व्यक्ति के हिस्से पर तथा वह समतुल्य हालात में <math>\frac{3}{4}</math> कैसे बना रहता है, इस पर अपना ध्यान केन्द्रित किया जाए। इस मामले में शिक्षार्थियों को अपना ध्यान 3 और 4 के बीच गुणात्मक संबंधों पर केन्द्रित करना चाहिए और इन्हीं संबंधों को 12 व्यक्तियों के मामले में हासिल करना चाहिए। उदाहरण के लिए, 4 को एक चौथाई 1 होता है और यह तीन बार लिया जाता है; ऐसे ही 12 का एक चौथाई 3 है और इसे तीन बार लेने से हमें 9 मिल जाते हैं। इसीलिए, 12 व्यक्तियों के लिए 9 पराठा पहले हालात के समतुल्य हैं। <b>समूहीकरण :</b> इस तरीके में, शिक्षार्थी 12 व्यक्तियों के समूह में 4 व्यक्तियों का समूह तलाशने की कोशिश करते हैं, और इसके बाद हरेक समूह के लिए पराठों की उस संख्या का पता लगाने की कोशिश करते हैं जिससे हरेक समूह के हालात, 4 व्यक्तियों के लिए 3 पराठे वाले हालातों के समतुल्य हो जाएं। टूल यानी औजार इस खास कार्यनीति को काम में लेता है। इस कार्यनीति का इस्तेमाल करते वक्त, नीचे दी गई बातों को ध्यान में रखना चाहिए।</p> <p>जिन समूहों के लिए यह बंटवारा मुमकिन है :</p> <p><b>समूहीकरण 1:</b> 4, 4, 4 सही बंटवारा : इसमें 3 उप-समूह हैं और हरेक में 4-4 कर्मचारी हैं। इनमें से हरेक समूह का हिस्सा 3 पराठों के बराबर होना चाहिए।</p> <p><b>समूहीकरण 2:</b> 2, 4, 6 सही बंटवारा : इसमें 6, 4 और 2 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। इन समूहों का हिस्सा क्रमशः <math>4\frac{1}{2}</math>, 3 और <math>1\frac{1}{2}</math> पराठा होना चाहिए।</p> <p><b>समूहीकरण 3:</b> 2, 2, 8 सही बंटवारा : इसमें 2, 2 और 8 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। इन समूहों का कुल हिस्सा क्रमशः <math>1\frac{1}{2}</math>, <math>1\frac{1}{2}</math> और 6 पराठे होना चाहिए।</p> <p><b>समूहीकरण 4:</b> 4, 8 सही बंटवारा : इसमें 2 समूह हैं, 8 कर्मचारियों को 1 समूह तथा 4 कर्मचारियों को 1 समूह है। 8 कर्मचारियों के समूह को 6 पराठे तथा 4 कर्मचारियों के समूह को 3 पराठे मिलेंगे।</p> <p><b>समूहीकरण 5:</b> 6, 6 सही बंटवारा : 6-6 कर्मचारियों के 2 समूह हैं। हरेक समूह को <math>4\frac{1}{2}</math> या 4.5 पराठे मिलेंगे।</p> <p><b>समूहीकरण 6:</b> 2, 10 सही बंटवारा : इसमें 2 समूह हैं। 10 कर्मचारियों का 1 समूह तथा 2 कर्मचारियों को 1 समूह। 10 कर्मचारियों के समूह को <math>7\frac{1}{2}</math> या 7.5 पराठे और 2 कर्मचारियों के समूह को <math>1\frac{1}{2}</math> या 1.5 पराठे मिलेंगे।</p>

**गतिविधि-2:** यह समस्या गतिविधि-1 के समान ही है। समूह A में 2 पराठा तथा 4 कर्मचारी हैं। समूह B में 10 कर्मचारी हैं। गणितीय तौर पर, यह समस्या शिक्षार्थियों के सामने नई चुनौती पेश करती है, इसमें शिक्षार्थियों को 4 तथा 10 के बीच गुणात्मक संबंध का पता लगाना है।

समतुल्य हालातों का पता लगाने के लिए दो तरह से तर्क दिया जा सकता है।  
**हिस्सेदारी/बंटवारा:** शिक्षार्थी देख सकते हैं कि पहले हालातों में 4 व्यक्तियों को 2 पराठे दिए गए हैं, और उसमें से हरेक को  $\frac{1}{2}$  पराठा मिला है। 10 कर्मचारियों में से हरेक को  $\frac{1}{2}$  पराठा देने के लिए उन्हें 5 पराठों की जरूरत पड़ेगी।

**समूहीकरण:** समूहीकरण में समतुल्य भिन्न बनाने के लिए अगर शिक्षार्थी 4 कर्मचारियों के समूह से शुरुआत करते हैं तो वे 4 कर्मचारियों के 2 समूह बनाएंगे और 2 कर्मचारियों का एक समूह बनेगा। कोई भी यह समझ सकता है कि दो कर्मचारियों के समूह को बाकी समूहों के समतुल्य बनाने के लिए उसे 4 कर्मचारियों के समूह को दिए गए पराठों के आधे पराठे ही देने होंगे। यह समस्या गुणात्मक चिंतन की खूबसूरती को दर्शाती है। जब 4 कर्मचारियों के हरेक समूह को 2 पराठे मिलते हैं, तब 2 कर्मचारियों के एक समूह को 1 पराठा मिलता है, और सारे पराठे मिला कर 5 पराठे हो जाते हैं।

जिन समूहों में बंटवारा मुमकिन है, वे इस प्रकार हैं:

समूहीकरण 1: 8, 2

सही बंटवारा: 8 और 2 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। हरेक समूह का हिस्सा क्रमशः 4 व 1 होना चाहिए।

समूहीकरण 2: 5, 5

सही बंटवारा: 5 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। हरेक समूह को  $2\frac{1}{2}$  या 2.5 पराठे मिलेंगे।

समूहीकरण 3: 3, 3, 4

सही बंटवारा: 3, 3 और 4 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। हरेक समूह के हिस्से में क्रमशः  $1\frac{1}{2}$  या 1.5, 1.5 तथा 2 पराठा आएगा।

समूहीकरण 4: 2, 2, 6

सही बंटवारा: 2, 2 और 6 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। हरेक समूह के हिस्से में क्रमशः 1, 1 और 3 पराठे आएंगे।

समूहीकरण 5: 4, 4, 2

सही बंटवारा: 4, 4 और 2 कर्मचारियों के तीन समूह हैं। हरेक समूह को क्रमशः 2, 2 तथा 1 पराठा मिलेगा।

समूहीकरण 6: 6, 4

सही बंटवारा: 6 और 4 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। हरेक समूह को क्रमशः 3 तथा 2 पराठे मिलेंगे।

<p><b>गतिविधि-3:</b> यहां पर 2 पराठे तथा 4 कर्मचारी हैं। समूह B में 9 कर्मचारी हैं। गणितीय तौर पर, यह गतिविधि वैसी ही है जैसी गतिविधि 1 है।</p>	<p>फिर से, समतुल्य हालातों के लिए दो तरीकों से तर्क किया जा सकता है। <b>हिस्सेदारी/बंटवारा:</b> शिक्षार्थी देखते हैं कि पहले हालात में, 3 व्यक्तियों को 2 पराठे दिए जाते हैं, यानी कि हरेक व्यक्ति को <math>\frac{1}{3}</math> पराठा दो बार मिलता है। 9 कर्मचारियों में से हरेक को <math>\frac{2}{3}</math> पराठा दिया जाना है, तो उन्हें 9 बार <math>\frac{2}{3}</math> पराठा देने की जरूरत पड़ेगी। <math>\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 18/3</math>, ये कुल मिला कर 6 पराठे हो जाएंगे। <b>समूहीकरण:</b> शिक्षार्थी 9 कर्मचारियों में 3 के समूह बनाने की कोशिश करेंगे। 3 कर्मचारियों के 3-3 समूह बना लेने के बाद समतुल्यता को बरकरार रखने के लिए, अगर वे हरेक समूह को 2 पराठे देते हैं तो उन्हें कुल मिला कर 6 पराठों की जरूरत पड़ेगी। दूल खास तौर पर इसी कार्यनीति को काम में लेता है। इस कार्यनीति का इस्तेमाल करते वक्त नीचे दी गई चीजों को ध्यान में रखें। जिन समूहों में बंटवारा मुमकिन है, वे इस प्रकार हैं : समूहीकरण 1: 3, 3, 3 सही बंटवारा: 3 उप-समूहों में, हरेक में 3 कर्मचारी हैं। हरेक समूह का हिस्सा 2 पराठों के बराबर होना चाहिए। समूहीकरण 2: 6, 3 सही बंटवारा: 6 और 3 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। इन समूहों का कुल हिस्सा क्रमशः 4 पराठा और 2 पराठा होगा।</p>
<p><b>गतिविधि-4:</b> यह सवाल इस पाठ के आकलन के लिए है। शिक्षार्थियों को इस सवाल को अपने आप करने के लिए पर्याप्त वक्त दें।</p>	<p>यहां पर यह उम्मीद की जाती है कि शिक्षार्थी या तो समूहीकरण का या फिर हिस्सेदारी/बंटवारा के तर्क का इस्तेमाल करेंगे और जरूरत पड़ी तो कागज कलम भी काम में लेंगे। उन्हें इस सवाल में दूल की मदद नहीं लेने दी जाएगी। यह जानबूझ कर किया गया है क्योंकि हम शिक्षार्थियों में सोचने के तरीकों का विकास करना चाहते हैं। हम यह नहीं चाहते कि वे सिर्फ डिजिटल दूल पर ही निर्भर हो जाएं।</p>

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- एक ऐसी कार्यनीति का पूर्वानुमान लगाइए जिसे आपके शिक्षार्थी शायद आपकी कक्षा में गतिविधि-4 के लिए इस्तेमाल करें। ऐसे सवालों की सूची बनाइए जिन्हें आप उस कार्यनीति के बारे में पूछना चाहेंगे।
- गतिविधि-3 के लिए उन सभी संभावित समूहीकरणों(सही या गलत) का पता लगाएं, जिनका इस्तेमाल शिक्षार्थी हरेक समूह को पराठा देते वक्त कर सकते हैं।
- सभी गतिविधियों को पूरा कर लेने के बाद, नीचे दिए गए संकेतों पर दोबारा विचार करें।
  - इस अध्याय पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आने वाली तीन चुनौतियां लिखें।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) को लिखें जिनकी बिल्कुल उम्मीद आपने शिक्षार्थियों से नहीं की थी।
- इस हालात को देखें : 8 व्यक्तियों में 6 पराठे बांटने हैं। इसके समतुल्य हालात का पता लगाइए जब व्यक्तियों की संख्या 18 हो। सभी संभावित समूहीकरण तथा हरेक के लिए सही बंटवारे पर चर्चा करिए।

## इकाई 2: गुणात्मक तर्क

### इकाई का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

इस इकाई में, शिक्षार्थी ऐसी गतिविधियों में शामिल होंगे, जो उनको तर्क करने तथा गुणात्मक तरीके से सोचने की तरफ बढ़ने को बढ़ावा दे। शिक्षार्थी हिस्सेदारी/बंटवारे तथा बराबर बंटवारे की अपनी समझ को गढ़ेंगे और समानुपात की शब्दावली में सोचना शुरू करेंगे। इस इकाई में व्यावहारिक के साथ साथ डिजिटल गतिविधियां भी होंगी। पैटर्न को दुबारा बनाने की डिजिटल गतिविधि शिक्षार्थियों की मदद करेगी कि वे अपनी सूझ बूझ का इस्तेमाल कर पाएं तथा उसे पैमाने की मदद से घटा या बढ़ा पाएं। एक डिजिटल गतिविधि में रोजाना की जिंदगी के कुछ हालातों के जरिए शिक्षार्थी की रोजमर्रा के हालातों में आनुपातिक तर्क की प्रासंगिकता का पता लगाने में मदद करेगी। मिश्रित काम आनुपातिक तर्क के केन्द्र में रहते हैं। इस इकाई में, हम उनमें से कुछ पर और उनके बारे में शिक्षार्थियों की तर्क पर काम करेंगे। व्यावहारिक गतिविधियां, जैसे नक्शा बनाना शिक्षार्थियों को अनुपातों के अनुप्रयोगों यानी एप्लीकेशनों के बारे में जागरूक करता है और प्रकरण की प्रासंगिकता को रेखांकित करता है। व्यावहारिक गतिविधियां, शिक्षार्थियों को इस बात के मौके देती है कि वे अपने कामों को करते वक्त ठोस चीजों का इस्तेमाल कर सकें। शिक्षार्थियों को कई संदर्भ में तथा अलग अलग प्रकार के कामों को करते वक्त गुणात्मक चिंतन के विचार की छानबीन करने का मौका मिलेगा।

### अध्याय का विवरण

क्र.	अध्याय का नाम	अध्याय का प्रकार	अध्याय का वर्णन
1	कॉफी और दूध	व्यावहारिक गतिविधियां	इस अध्याय में असतत मात्राओं का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थियों को गुणात्मक चिंतन से परिचित कराया जाएगा। शिक्षार्थी अनुपातों में बराबरी को बरकरार रखते हुए समूहीकरण की कई कार्यनीतियों को काम में लेंगे। यहां पर, सतत मात्राएं असतत प्रारूप में हैं, जिससे शिक्षार्थियों को सतत व असतत मात्राओं में लचीले तर्क को विकसित करने का मौका मिलता है। एक गतिविधि में बराबर अनुपातों को बरकरार रखते हुए गणना करने के लिए एक संदर्भ इस्तेमाल किया गया है, और उसी संदर्भ को दूसरी गतिविधि में एक से ज्यादा अनुपातों से जुड़े तर्क में इस्तेमाल किया गया है।
2	जामुनी ने हल की पहली	डिजिटल	इस डिजिटल अध्याय में शिक्षार्थियों को ऐसे काम से परिचित करवाया जाएगा जिनमें पैमाने के गुणक का पता लगाने के साथ-साथ पैमाना बढ़ाना या घटाना भी शामिल है। यह गतिविधि मूल तथा पैमाने के आधार पर घटाए या बढ़ाए गए पैटर्नों की इकाइयों में होने वाले बदलावों पर शिक्षार्थियों को सोचने के लिए बढ़ावा देगी। इस डिजिटल अध्याय में पैटर्न टूल को काम में लिया गया है। यह टूल शिक्षार्थियों की, पैटर्नों को पैमाने के आधार पर इस तरह से बढ़ाने व सिकोड़ने में मदद करेगा कि उनकी तस्वीर पहले जैसी ही दिखाई देती रहे।
3	जामुनी गई बाजार	डिजिटल	इस अध्याय में दी गई गतिविधियां गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों को इस्तेमाल करने में शिक्षार्थियों की मदद करेगी। इसमें सतत मात्राओं का इस्तेमाल किया गया है लेकिन उन्हें असतत भी किया जा सकता है तथा शिक्षार्थी पैमाने वाले तथा वेक्टर वाले दोनों ही अनुपात काम में ले सकते हैं। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को गुणात्मक चिंतन करने का मौका देगी तथा मात्राओं के साथ आनुपातिक संबंधों का इस्तेमाल करने का मौका देगी। ये

3	साहिर ने बनाया पोस्टर	व्यावहारिक गतिविधियां	<p>गतिविधियां शिक्षार्थियों को इस बात का भी मौका देगी कि वे सतत मात्राओं की तुलना करने के लिए आनुपातिक चिंतन में अलग-अलग तरह की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करें। बेहतरीन खरीदारी वाली समस्याएं शिक्षार्थी की अपनी रोजमर्रा की जिंदगी से जुड़ती हैं। ज्यामितीय आकारों की अवधारणाओं के साथ काम लेने से शिक्षार्थियों की आनुपातिक समझ और मजबूत होती है। यह ज्यामितीय आकृतियों की लंबाई तथा चौड़ाई के संदर्भ में 'आंतरिक' तथा 'बाहरी' अनुपात के बारे में सोचने में शिक्षार्थियों की मदद करती है।</p> <p>इस अध्याय में, शिक्षार्थी सतत मात्राओं का इस्तेमाल करते हुए गुणात्मक तर्क करना सीखेंगे। शिक्षार्थी गुणात्मक चिंतन तथा अनुपात-समानुपात के व्यावहारिक इस्तेमाल के साथ भी इसे जोड़ कर देखेंगे।</p>
---	-----------------------	-----------------------	---

## इकाई 2: गुणात्मक तर्क अध्याय 1: कॉफी और दूध

### अध्याय का ओवरव्यू

इस अध्याय में, शिक्षार्थी गुणात्मक चिंतन की कई तरह की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करना सीखेंगे। समूहीकरण तथा अनुपात का पता लगाना व उनकी आपस में तुलना करना इस अध्याय की महत्त्वपूर्ण अवधारणाएं हैं।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- अनुपात की बराबरी को बरकरार रखने के लिए समूहीकरण की अलग-अलग तरह की कार्यनीतियां विकसित करना।
- समूहीकरण की कई तरह की कार्यनीतियां विकसित करना।
- सतत मात्राओं को असतत मात्राओं में बदल कर जोड़-तोड़ करना।
- सतत तथा असतत मात्राओं में लचीले तरीके से तर्क करने की काबिलियत को विकसित करना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

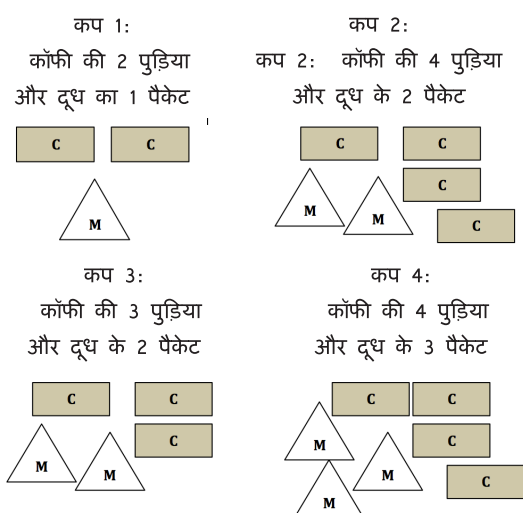
यह अध्याय सतत मात्रा का इस्तेमाल करते हुए गुणात्मक चिंतन से शिक्षार्थियों का परिचय करवाता है। शिक्षार्थी अनुपात की बराबरी बरकरार रखने के लिए समूहीकरण की कई तरह की कार्यनीतियां विकसित करेंगे। यहां पर सतत मात्राएं जैसे दूध तथा कॉफी के साथ असतत तौर पर जोड़ तोड़ करते हैं जिससे शिक्षार्थियों को सतत तथा असतत मात्राओं के साथ लचीले ढंग से तर्क करने का मौका मिलता है।

दूध तथा कॉफी को दर्शाने के लिए दो अलग-अलग तरह के आकृतियों के सेट बना लें। कॉफी को दर्शाने के लिए आयत तथा दूध को दर्शाने के लिए त्रिभुज तय कर लें। आप स्क्रीन पर दिखाई देने वाली आकृति जैसी तस्वीर बोर्ड पर बना सकते हैं जिसमें हरेक संख्या एक कप कॉफी को दर्शाएगी। शिक्षार्थी बोर्ड पर दिखाए अनुसार कार्ड अपनी मेज पर जमाएं। इसके बाद आप सवाल पूछ सकते हैं और शिक्षार्थियों को इस बात का मौका दें कि वे अपने समूह के साथियों के साथ मिल कर जवाब खोजें।

## काम और गणितीय प्रासंगिकता

**गतिविधि-1:** इस गतिविधि में, शिक्षार्थी एकसमान मिश्रण के नजरिए से अनुपात के विचारों पर काम करते हैं। आनुपातिक हालातों को बनाने या पहचानने के लिए समूहीकरण की अलग-अलग कार्यनीतियों के इस्तेमाल को आसानी से समझने के लिए कॉफी में दूध मिलाने जैसे रोजमर्रा की जिंदगी के एक काम का प्रयोग किया गया है।

- कप-1 : कॉफी की 2 पुड़िया और दूध की 1 थैली  
कप-2 : कॉफी की 4 पुड़िया और दूध की 2 थैली  
कप-3 : कॉफी की 3 पुड़िया और दूध की 2 थैली  
कप-4 : कॉफी की 4 पुड़िया और दूध की 3 थैली



**गतिविधि-2:** यह गतिविधि पिछली गतिविधि का ही विस्तार है, जिसमें शिक्षार्थियों को एक कप कॉफी के लिए एक अनुपात दिया गया था और उनसे कहा गया था कि वे उसके समतुल्य कोई हालात बनाएं। ये सभी हालात समानुपात की अज्ञात राशि वाली समस्याओं को दर्शाते हैं, जो कि आम तौर पर पाठ्यपुस्तकों में पूरी तरह से संख्यात्मक तथा अमूर्त ढंग से दी जाती हैं।

## शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां

इस काम में शिक्षार्थियों को हरेक कॉफी के कप का सावधानीपूर्वक अध्ययन करना है और यह पता लगाना है कि चार कपों में किस कप में सबसे ज्यादा दूध है। शिक्षार्थी आयतों तथा त्रिभुजों का इस्तेमाल करते हुए अपनी मेजों पर नीचे दिए गए संयोजन बनाएंगे।

किस कॉफी में दूध ज्यादा है, यह जानने के लिए शिक्षार्थी हरेक कप के लिए बनाए गए संयोजन को देखेंगे। उदाहरण के लिए, वे दूध की एक थैली की कॉफी की दो पुड़ियाओं के साथ जोड़ी बना सकते हैं और इस पैटर्न की तुलना दूसरे कपों के साथ कर सकते हैं। शिक्षार्थियों को अपने आप छानबीन करने दें। जब वे इस सवाल पर काम कर रहे हों तब आप उनकी कार्यनीतियों को दर्ज करने की कोशिश करें।

अगर शिक्षार्थियों को आगे बढ़ना मुश्किल लग रहा हो तो इस बात की तरफ उनका ध्यान दिलाएं कि कप-1 और कप-2 में बराबर दूध है क्योंकि दोनों ही कपों में दूध की 1 थैली के साथ कॉफी की 2 पुड़िया काम में ली गई है।

कप-3 में, दूध की 2 थैली के साथ कॉफी की 3 पुड़िया काम में ली गई है। जब इसकी तुलना कप-4 के साथ करते हैं, तो हम पाते हैं कि कॉफी की 3 पुड़िया के साथ दूध की 2 थैलियां मिलाई गई हैं, और बाकी बची कॉफी की 1 पुड़िया के लिए दूध की 1 थैली है। इसलिए कप-3 की तुलना में कप-4 में ज्यादा दूध है। अब शिक्षार्थियों से कहें कि वे इसी तरह से कप-3 तथा कप-1 (या कप-2) की तुलना करें। शिक्षार्थियों से कहें कि वे अपनी कार्यनीतियों को अपने सहपाठियों के साथ साझा करें।

शिक्षार्थियों को कॉफी की 6 पुड़िया दी गई। उन्हें एक कप कॉफी बनाने के लिए दूध की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी, अगर उनके कप की कॉफी नीचे दिए कप के समान हों :

- गतिविधि-1 में दिया गया कप-3
- गतिविधि-1 में दिया गया कप-4

इस समस्या को समझ कर हल करने के दो तरीके हैं।  
बाहरी अनुपात : समान अनुपात में मात्राएं बनाने के लिए राशियों का एक समूह दिया गया है। उदाहरण के लिए, कप-3 में कॉफी की 3 पुड़िया के लिए दूध की 2 थैलियां हैं। कॉफी की 6 पुड़िया से इसके समतुल्य कॉफी बनाने के लिए शिक्षार्थियों को यह समझने की जरूरत है कि कप-3



	<p>में अनुपात 3:2 है और उन्हें अनुपात में समतुल्यता बरकरार रखने के लिए 3:2 का पता लगाना है। इसे बाहरी अनुपात कहा जाता है। फिर से, चूंकि अनुपात एक गुणात्मक अवधारणा है इसलिए हमें 6 और 3 के बीच में संबंध नहीं देखना है कि 6,3 से 3 ज्यादा है। बल्कि 6 को 3 के दुगुने के तौर पर देखना है। इसलिए स्वाद में समतुल्यता बरकरार रखने के लिए हमें दूध की दुगुनी यानी 4 थैलियों की जरूरत पड़ती है।</p> <p>आंतरिक अनुपात : इस समस्या को एक दूसरे तरीके से समझने का तरीका यह है कि इसमें यह पूछा जाए कि दी गई कॉफी की पुड़ियों के लिए दूध की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी। कप-3 में कॉफी की 3 पुड़िया के लिए दूध की 2 थैलियां है। अब कॉफी की 6 पुड़ियों के लिए हमें 2:3 के अनुपात में हमें दूध की थैलियां तथा कॉफी की पुड़िया चाहिए। फिर से, शिक्षार्थियों को 2 व 3 के बीच के संबंध को गुणात्मक तौर पर देखना चाहिए। हम जानते हैं कि 2 पुड़िया, 3 पुड़िया की <math>\frac{2}{3}</math> होती है, इसलिए स्वाद में समतुल्यता लाने के लिए हमें 6 पुड़िया के <math>\frac{2}{3}</math> की जरूरत पड़ेगी और उसमें 4 दूध की थैलियां लेनी पड़ेगी।</p>
<p><b>गतिविधि-3:</b> यह गतिविधि पिछली गतिविधि से ज्यादा पेचीदी है। इसमें कॉफी की पुड़िया तथा दूध की थैली, दोनों की संख्या सीमित कर दी गई है और पहले जहां एक कप कॉफी ही बनानी थी, इसमें उसी स्वाद वाली कॉफी के 4 कप बनाने हैं। इस का उद्देश्य समान अनुपात के साथ साथ पैमाने की मदद से बढ़ाने के विचार की जड़ें मजबूत करना है।</p>	<p>शिक्षार्थियों को कॉफी की 15 पुड़िया दी गई और दूध की 11 थैलियां दी गई और उन्हें कहा गया कि वे 4 कप कॉफी बनाएं, उसमें दूध की मात्रा उतनी ही होनी चाहिए जितनी कि पहली गतिविधि के कप-4 में एक कप में थी। वे गतिविधि- 2 में दिए गए तरीके से आंतरिक या बाहरी अनुपात का पता लगा सकते हैं।</p> <p>यहां पर अध्यापक इस बात को पक्का करने के लिए, कि शिक्षार्थी काम तथा समतुल्य अनुपात को समझ पा रहे हैं, नीचे दिए गए सवाल पूछ सकते हैं।</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• कप-4 में कॉफी की पुड़िया के साथ दूध का अनुपात क्या है ?</li> <li>• कप-4 के समतुल्य स्वाद वाली कॉफी बनाने कॉफी की कितनी पुड़ियों तथा दूध की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी ?</li> </ul>

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- अपनी कक्षा में आज हुई दो अलग-अलग चर्चाओं का वर्णन करिए।
  - आपने इन्हीं दो को क्यों चुना ?
  - इन चर्चाओं की गणितीय अहमियत क्या है ?
  - इन घटनाओं के सामाजिक पहलू क्या हैं ?
- गतिविधि-1 में, ज्यादा दूध वाली कॉफी बनाने के लिए जिन तरीकों का इस्तेमाल किया गया, उनमें से कुछ तरीकों को लिखिए ?
- गतिविधि-3 में जवाब का पता लगाने के कम से कम दो तरीके बताइए। किसी एक संभावित गलत जवाब का अनुमान लगाइए और उसके पीछे का तर्क समझाइए।
- क्या आपने शिक्षार्थियों के सोचने के तरीके में किसी तरह के पैटर्न का दोहराव पाया? संक्षेप में लिखिए।
- आनुपातिक तर्क से आप क्या समझते हैं, अपने शब्दों में लिखिए। यह भी समझाइए कि कॉफी-दूध के काम ने, आनुपातिक तर्क को विकसित करने में कैसे मदद की।
- ऐसे कई तरीके हैं जिनका इस्तेमाल करके शिक्षार्थी इन समस्याओं पर काम कर सकते हैं। हमने देखा कि उन्होंने ग्रुपिंग टूल का इस्तेमाल कैसे किया। इसी तरह वे मात्राओं का जत्था/झुंड बना सकते हैं। कॉफी-दूध की ऐसी एक समस्या बनाइए जिसमें इनमें से कुछ कार्यनीतियों को इस्तेमाल करने का मौका मिले।

## इकाई 2: गुणात्मक तर्क अध्याय 2: जामुनी ने हल की पहली

### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

पैमाने की मदद से घटाने और बढ़ाने का कौशल आनुपातिक तर्क की जान है। इस अध्याय में, हम अपना ध्यान इस कौशल पर केन्द्रित करते हैं तथा इस कौशल के संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण को मजबूत करते हैं। इस अध्याय की गतिविधियां दिए गए पैटर्न को पैमाने के आधार पर घटा या बढ़ा कर गुणात्मक चिंतन करने में शिक्षार्थियों की मदद करती है। इस अध्याय में दो तरह की गतिविधियां हैं। पहली तरह की गतिविधियों में, दिए गए पैटर्न की बाहरी किनारी को पैमाने के आधार पर घटाना या बढ़ाना है और शिक्षार्थियों को उस पैटर्न को दोबारा बनाने के लिए पैमाने के गुणक का पता लगाना है। दूसरी तरह की गतिविधियों में, पैमाने का गुणक दिया हुआ है और शिक्षार्थियों को उस गुणक के आधार दिए गए पैटर्न को बढ़ाना या घटाना है। शिक्षार्थियों को मूल तथा नए बनाए गए पैटर्न के बीच संबंधों के बारे में सोचने के लिए कहा जाएगा। इस काम के लिए बनाया गया डिजिटल औजार आनुपातिक तरीके से सोचने के लिए दृश्य तथा शब्दों के जरिए अर्थ आधारित मदद करता है।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- दो आयामी पैटर्न को आनुपातिक ढंग से पैमाने के आधार पर घटाने या बढ़ाने के लिए गुणात्मक चिंतन का इस्तेमाल करना।
- पैमाने के आधार पर पैटर्न को घटाने व बढ़ाने को इस्तेमाल करना तथा समझाना। ऐसा करते वक्त इस बात का ध्यान रखना कि पैटर्न का आकार पहले जैसा ही दिखाई देता रहे।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

### काम और गणितीय प्रासंगिकता

**पहले प्रकार का काम :** पैमाने के आधार पर बढ़ाए या घटाए गए पैटर्न के जाल की किनारी नीचे दी गई है तथा शिक्षार्थियों से कहा गया कि वे जाल में दिए गए पैटर्न को दोबारा बनाने के बाद पैमाने के गुणक का पता लगाएं।

G	G	G
G	R	G
G	G	R

एक 9 x 9 का बाहरी जाल दिया गया है। जाल को भरते वक़्त शिक्षार्थियों को अवलोकन करने कहें। उनके साथ बातचीत करें: नया पैटर्न मूल पैटर्न से कितना गुना बड़ा होता है ?

**दूसरे प्रकार के काम :** इन कामों में, मूल पैटर्न को जिस पैमाने पर बढ़ाना है, उसका गुणक दिया है। नए पैटर्न के जाल की किनारी नहीं दी गई है। शिक्षार्थी नया पैटर्न बनाएं तथा कुछ सवालों पर सोचें।

इस प्रकार की गतिविधि का एक उदाहरण : दिए गए पैटर्न को 2 के गुणक में पैमाने पर कम करें तथा जाल में हरी तथा लाल टाइलें भरें।

R		R					
R		R					
R		R					
R		R					

### शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां

नए पैटर्न को पैमाने की मदद से 3 के गुणक में बढ़ाया गया। आप शिक्षार्थियों से नीचे दिए गए सवाल पूछ सकते हैं :

- मूल पैटर्न में टाइलों की कुल संख्या कितनी है ?
- नए पैटर्न में कितनी टाइलें हैं?
- पैटर्न को 3 के गुणक में बढ़ाने पर नए पैटर्न में 81 टाइलें क्यों हो जाती है (जबकि मूल पैटर्न में 9 टाइलें थी)?

जब हमने इस गतिविधि को शिक्षार्थियों के साथ करके देखा तो हमने कुछ चीजों सीखीं, जिन्हें आपकी मदद के लिए नीचे दिया गया है।

- जब हम यह दिखने में एक समान पैटर्न की बात करते हैं तब हमें इस बात पर चर्चा करनी चाहिए कि इसका क्या मतलब होता है। इसका मतलब होता है कि जब हम किसी पैटर्न को एक अनुपात में बढ़ाते या घटाते हैं तब उसकी डिजाइन बरकरार रहनी चाहिए।
- यहां पर दो आयामी आकृतियां इस्तेमाल की गई हैं, और जब हम कहते हैं कि इस पैटर्न को 3 के गुणक में पैमाने पर बढ़ाया जाए, तो इसका मतलब यह होता है कि इसे दोनों आयामों में उस गुणक की मदद से बढ़ाया या घटाया जाए। इसलिए इस पैटर्न में टाइलों की संख्या 9 गुना बढ़ जाती है।

आप शिक्षार्थियों से पूछ सकते हैं कि उन्होंने एक खास तरह का पैटर्न क्यों बनाया और यह कैसे तय किया कि उसमें कितने लाल व हरी टाइलें होंगी।

यह जरूरी है कि शिक्षार्थी दोनों पैटर्नों के बीच के संबंधों को समझे। यह भी जरूरी है कि वे इस बात को भी समझें कि जब एक पैटर्न को 3 के गुणक में बढ़ाया जाता है तब उसमें इकाइयों की संख्या 9 गुना ( $3 \times 3$ ) बढ़ जाती है क्योंकि यह एक दो आयामी पैटर्न है। एक काम में, पैमाने का गुणक एक भिन्नात्मक संख्या है। आपको संभवतः उदाहरण लेकर शिक्षार्थियों को  $\frac{1}{2}$ , 1.5 (1 तथा  $1/2$ ) को पैमाने की मदद से बढ़ाने को समझाने में मदद करनी पड़े।

टाइलीकरण एक तरह से छाप लगाने जैसा है जिसमें दिए गए क्षेत्रफल को भरने के लिए हम पैटर्न को दोहराते हुए एक के बाद एक भरते जाते हैं। इसमें पैमाने की मदद से किसी तरह की घट-बढ़ नहीं की जाती। मुमकिन है कि शिक्षार्थी पैमाने का इस्तेमाल किए बगैर दिए गए पैटर्न का टाइलीकरण कर दें। आप उनके साथ इस बात पर चर्चा कर सकते हैं कि पैटर्न को बढ़ाया या घटाया कैसे जाए, पैमाने के गुणक का क्या मतलब होता है और उसका आनुपातिक तर्क के साथ क्या संबंध है। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को गुणात्मक तरीके से सोचने पर मजबूर करेगी क्योंकि यहां पर

शिक्षार्थियों से कहा जाना चाहिए कि वे मूल तथा पैमाने के आधार पर कम किए गए पैटर्न की आपस में तुलना करें तथा दोनों पैटर्नों में हरी तथा लाल टाइलों में संबंध का पता लगाएं।

योगात्मक तरीके से तर्क करना कम सूझ बूझ का काम है, और अगर वे योगात्मक ढंग से सोचेंगे तो चाहा गया पैटर्न नहीं बना पाएंगे।

आपके पूछने के लिए संभावित कुछ पूरक सवाल नीचे दिए गए हैं :

- अगर आप पैमाने के आधार पर बढ़ाने को गणितीय कथन में दर्शाना चाहे तो उसे कैसे दर्शाएंगे ? उदाहरण के लिए,  $6 \times 2$  के आयत को पैमाने पर 4 गुना बढ़ाना है। इसे आप गणितीय कथन के तौर पर कैसे दर्शाएंगे ?
- सिकोड़ने की प्रक्रिया को अरप गणितीय तौर पर कैसे दर्शाएंगे ?

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- अपनी कक्षा में आज हुई दो अलग-अलग चर्चाओं का वर्णन करिए।
- आपने इन्हीं दो को क्यों चुना ?
- इन चर्चाओं की गणितीय अहमियत क्या है ?
- इन घटनाओं के सामाजिक पहलू क्या हैं ?
- इन पैटर्नों को बनाते वक्त शिक्षार्थियों को क्या-क्या मुश्किलें आती हैं ?
- पहले व दूसरे प्रकार के कामों का अवलोकन करके बताएं कि कौनसा काम शिक्षार्थियों के लिए आसान होता है। समझाइए कि वह काम दूसरे काम की तुलना में आसान क्यों होता है।
- पैमाने पर संख्यात्मक तौर पर 3 के गुणक में बढ़ा कर, शिक्षार्थी टाइलों की संख्या कितनी बढ़ाएंगे ? 3 तक या 9 तक ? शिक्षार्थियों को यह समझने में मुश्किल होती है, इस बारे में आप क्या सोचते हैं ?
- शिक्षार्थियों में समस्या समाधान के कौशलों को विकसित करने में प्रत्यक्ष अनुपात का विचार कैसे मदद करेगा ?

## इकाई 2: गुणात्मक तर्क अध्याय 3: जामुनी गई बाजार

### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

इस अध्याय में, शिक्षार्थी असतत मात्राओं के संदर्भ में गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करेंगे। यह अध्याय शिक्षार्थियों में ज्यामितीय आकृतियों की अवधारणा को इस्तेमाल करते हुए, उनमें अनुपात की समझ को मजबूत करने की कोशिश करेगा। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देंगी कि वे सतत मात्राओं की तुलना करने के लिए आनुपातिक चिंतन में अलग-अलग कार्यनीतियों का इस्तेमाल कर सकें।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे:

- गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों को लागू करना।
- सतत मात्राओं की असतत मात्राओं की तरह गणना करना तथा अदिश (स्केलर यानी पैमाने वाले) तथा सदिश (वेक्टर) अनुपातों का इस्तेमाल करना
- मात्राओं के साथ आनुपातिक संबंधों का इस्तेमाल करना

### गणितीय विचारों पर चर्चा

काम और गणितीय प्रासंगिकता	शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां
<p><b>गतिविधि-1:</b> यह गतिविधि इकाईकरण तथा समूहीकरण पर अपना ध्यान केन्द्रित करती है। इसमें शिक्षार्थी या तो किसी एक चीज की कीमत का पता लगाएंगे व उसके बाद कई चीजों की कीमत निकालेंगे या फिर अंडों की एक और एक आधी ट्रे की कीमत का पता लगाने के लिए सुविधाजनक समूह बनाएंगे। इकाईकरण शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देता है कि वे एक के अलावा भी इकाइयां बना सकें। उदाहरण के लिए, 1 अंडे की इकाई के तौर पर तथा एक आधी ट्रे की तीन आधे के तौर पर कीमत का पता लगाने की तुलना में 6 अंडों की कीमत का पता लगाना ज्यादा फायदेमंद है।</p> <p>काम कुछ इस तरह से है :</p> <p>जामुनी और उसकी दोस्त एक अंडे की दुकान पर हैं। वे दोनों अंडों की एक ट्रे देखती हैं। हरेक ट्रे में 12 अंडे हैं और उसकी कीमत 36 रूपये है। अब, अगर वे एक ऐसी अंडे की ट्रे खरीदना चाहें जिसमें इस ट्रे की तुलना में एक व एक आधा गुना यानी डेढ़ गुना अंडे हों तो उन्हें कितनी रकम अदा करनी होगी ?</p>	<p>शिक्षार्थियों के साथ इस बात पर चर्चा करें ताकि वे 'एक व एक आधा गुना यानी डेढ़ गुना' का मतलब समझ पाएं। इस काम को समझ कर करने का एक तरीका यह है कि इस बात को पहचाना जाए कि अंडों की संख्या एक व एक आधा गुना बढ़ाने से अंडों की ट्रे की लागत भी एक व एक आधा गुना यानी डेढ़ गुना बढ़ जाएगी। 36 का एक व एक आधा गुना पता लगाएं क्योंकि अंडों तथा उनकी कीमत का आपसी संबंध समानुपातिक है।</p> <p>दूसरा तरीका यह है कि पहले एक अंडे की कीमत का पता लगाते हैं और उसके बाद 12 अंडों की एक तथा एक आधा गुना अंडों का पता लगा कर उनकी कीमत निकालते हैं। शिक्षार्थियों को इन अलग-अलग कार्यनीतियों में शामिल करने से, आनुपातिक तर्क के विचार के जरिए उनके गणितीय मॉडलिंग के कौशल विकसित होंगे।</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• शबाना जामुनी की दोस्त है और वह अंडों की दो ट्रे खरीदना चाहती है। वह देखती है कि हरेक ट्रे में सफेद व भूरे दोनों ही तरह के अंडे रखे हैं। पहली ट्रे में 12 अंडे हैं, उनमें से 4 भूरे तथा 8 सफेद हैं। दूसरी ट्रे में 18 अंडे हैं। अगर दोनों ट्रे में सफेद व भूरे अंडों का अनुपात बराबर हो तो दूसरी ट्रे में हरेक रंग के कितने अंडे मौजूद होंगे ?</li> </ul>

	ट्रे-1	ट्रे-2
अंडों की कुल संख्या	12	18
सफेद अंडों की संख्या	4	
भूरे अंडों की संख्या	8	

इस काम में 18 की संख्या को दो हिस्सों में इस तरह से बांटने की जरूरत है कि एक हिस्सा दूसरे हिस्से का दुगुना हो। हमें शिक्षार्थियों का ध्यान इस तरफ दिलाने की जरूरत पड़ेगी कि ट्रे 2 में सफेद व भूरे अंडों का अनुपात वही रहेगा जो कि ट्रे 1 में है। शिक्षार्थी प्रयत्न व भूल के तरीके को भी काम में ले सकते हैं। वे सफेद तथा भूरे अंडों की संख्या को दुगुना कर सकते हैं। ट्रे 1 में रखे सफेद तथा भूरे अंडों की संख्या का यानी एक व एक आधा गुना) करके भी जवाब हासिल किया जा सकता है क्योंकि 18, 12 का डेढ़ गुना होता है। सफेद व भूरे अंडों की संख्या मिला कर डेढ़ गुना होगी, यह तथ्य बहुत अहम है, इसे रेखांकित किया जाना चाहिए।

**गतिविधि-2:** यहां पर, अब तक शिक्षार्थियों द्वारा काम लिए गए परिचित लेकिन अलग संदर्भ मुहैया करवाने की कोशिश की गई है। गणितीय तौर पर सीखना पक्का करने के लिए, यह जरूरी है कि संदर्भ को बदला जाए ताकि शिक्षार्थी एक संदर्भ में बनी अपनी समझ को, दूसरे संदर्भों में इस्तेमाल करना सीखें।

अमन ने अपने दोस्तों के बीच साझा (बाँटने) के लिए एक चॉकलेट बार खरीदना तय किया। जब वह चॉकलेट की दुकान पर गया तो उसे कुछ समस्याओं का सामना करना पड़ा। आप उन समस्याओं को हल करने में उसकी मदद करिए।

- एक सफेद चॉकलेट की बार में 10 छोटे टुकड़े हैं। अगर अमन अपने हरेक दोस्त को दो छोटे टुकड़े देना तय करे, तो वह अपने कितने दोस्तों के साथ उस बार को साझा कर सकता है ?
- दुकानदार 3 छोटे आकार की सफेद चॉकलेट के पैक को 4 रुपये में बेचता है। अगर अमन 40 रुपये खर्च करे तो वह इस तरह के कितने टुकड़े खरीद सकता है।
- दुकानदार भूरी चॉकलेट के एक छोटे टुकड़े के 4 रुपये लेता है। अगर अमन ऐसे 10 टुकड़े खरीदना तय करता है तो उसे कितनी रकम की जरूरत पड़ेगी ?

इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों को एक से ज्यादा संदर्भ तथा अनुभव मुहैया करवाना है ताकि वे आनुपातिक तर्क की कार्यनीतियों की छानबीन कर सकें। आप शिक्षार्थियों की मदद करें ताकि वे अलग-अलग कार्यनीतियों को आजमा कर देख सकें।

समानुपात से जुड़ी समस्याओं को दो तरीकों से हल किया जा सकता है – 'अनुपातों के बीच में' का पता लगा कर और 'अनुपातों के अंदर' का पता लगा कर। इस समस्या को पढ़ें : अगर 4 चॉकलेट की लागत 12 रुपये हो, तब 8 चॉकलेट की लागत क्या होगी ? अनुपातों के बीच का इस्तेमाल करके हम देख सकते हैं कि चॉकलेट की संख्याओं के बीच में 1:2 (4:8) का अनुपात है और लागत का अनुपात भी 1:2 होगा। इसलिए, 8 चॉकलेट की लागत 12 की दुगुनी यानी 24 होगी। अनुपातों के अंदर वाले तरीके का इस्तेमाल करने के लिए हमें हरेक चॉकलेट की लागत निकालनी पड़ेगी। इसे वेक्टर (सदिश) वाला तरीका भी कहते हैं। हरेक चॉकलेट की लागत का इस्तेमाल बाद में 8 चॉकलेट की लागत निकालने में किया जाता है।

**गतिविधि-2:** यहां पर, अब तक शिक्षार्थियों द्वारा काम लिए गए परिचित लेकिन अलग संदर्भ मुहैया करवाने की कोशिश की गई है। गणितीय तौर पर सीखना पक्का करने के लिए, यह जरूरी है कि संदर्भ को बदला जाए ताकि शिक्षार्थी एक संदर्भ में बनी अपनी समझ को, दूसरे संदर्भों में इस्तेमाल करना सीखें।

अमन ने अपने दोस्तों के बीच साझा (बाँटने) के लिए एक चॉकलेट बार खरीदना तय किया। जब वह चॉकलेट की दुकान पर गया तो उसे कुछ समस्याओं का सामना करना पड़ा। आप उन समस्याओं को हल करने में उसकी मदद करिए।

- एक सफेद चॉकलेट की बार में 10 छोटे टुकड़े हैं। अगर अमन अपने हरेक दोस्त को दो छोटे टुकड़े देना तय करे, तो वह अपने कितने दोस्तों के साथ उस बार को साझा कर सकता है ?
- दुकानदार 3 छोटे आकार की सफेद चॉकलेट के पैक को 4 रुपये में बेचता है। अगर अमन 40 रुपये खर्च करे तो वह इस तरह के कितने टुकड़े खरीद सकता है।
- दुकानदार भूरी चॉकलेट के एक छोटे टुकड़े के 4 रुपये लेता है। अगर अमन ऐसे 10 टुकड़े खरीदना तय करता है तो उसे कितनी रकम की जरूरत पड़ेगी ?



इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों को एक से ज्यादा संदर्भ तथा अनुभव मुहैया करवाना है ताकि वे आनुपातिक तर्क की कार्यनीतियों की छानबीन कर सकें। आप शिक्षार्थियों की मदद करें ताकि वे अलग-अलग कार्यनीतियों को आजमा कर देख सकें।

समानुपात से जुड़ी समस्याओं को दो तरीकों से हल किया जा सकता है – 'अनुपातों के बीच में' का पता लगा कर और 'अनुपातों के अंदर' का पता लगा कर। इस समस्या को पढ़ें : अगर 4 चॉकलेट की लागत 12 रुपये हो, तब 8 चॉकलेट की लागत क्या होगी ? अनुपातों के बीच का इस्तेमाल करके हम देख सकते हैं कि चॉकलेट की संख्याओं के बीच में 1:2 (4:8) का अनुपात है और लागत का अनुपात भी 1:2 होगा। इसलिए, 8 चॉकलेट की लागत 12 की दुगुनी यानी 24 होगी। अनुपातों के अंदर वाले तरीके का इस्तेमाल करने के लिए हमें हरेक चॉकलेट की लागत निकालनी पड़ेगी। इसे वेक्टर (सदिश) वाला तरीका भी कहते हैं। हरेक चॉकलेट की लागत का इस्तेमाल बाद में 8 चॉकलेट की लागत निकालने में किया जाता है।



**गतिविधि-3:** इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों के सामने आनुपातिक तर्क की कार्यनीतियों की छानबीन करने के लिए, ज्यादा संदर्भ तथा अनुभव प्रस्तुत करना है। आप शिक्षार्थियों की मदद करें ताकि वे अलग-अलग कार्यनीतियों का इस्तेमाल कर सकें। जमुनी और उसकी दोस्त को प्यास लग रही थी। वे दोनों रस की दुकान पर गईं। रस की दुकान पर दो विकल्प मौजूद थे: 6 लीटर का डिब्बा 200 रुपये में और 4 लीटर का डिब्बा 150 रुपये में।

कौनसा डिब्बा सस्ता है ?

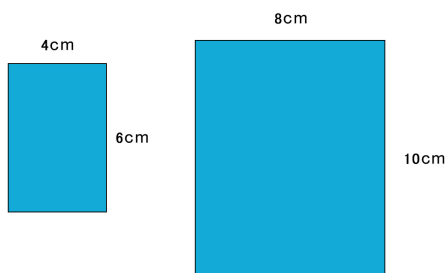
- 6 लीटर का डिब्बा
- 4 लीटर का डिब्बा



शोध-कार्यों में यह पाया गया कि शिक्षार्थी इस तरह की समस्याओं को हल करने में बहुत परिष्कृत कार्यनीतियों का इस्तेमाल कर सकते हैं। वे कह सकते हैं कि वे रस के बड़े डिब्बे में रस भरने के लिए रस के छोटे डिब्बे का इस्तेमाल कर सकते हैं। वे बड़े डिब्बे को पूरा भरने के लिए उसमें छोटे डिब्बे को एक बार पूरा व एक बार आधा भर कर डाल सकते हैं। यहां पर तर्क यह है कि बड़े डिब्बे में  $4 + 2$  लीटर भरा जा सकता है। इसी तर्क से, बड़े डिब्बे की लागत  $150 + 75 = 225$  होगी। लेकिन इसकी असल लागत तो 200 रुपये है और इस तरह से 6 लीटर का डिब्बा सस्ता पड़ता है। हम दोनों डिब्बों में एक लीटर रस की लागत निकाल कर व उनकी आपस में तुलना करने की कार्यनीति का भी इस्तेमाल कर सकते हैं।

**गतिविधि-4:** यह एक दूसरे प्रस्तुतीकरण में पैमानीकरण की समस्या है। अब तक शिक्षार्थी आयामों के बारे में आनुपातिक ढंग से तर्क करने के काबिल हो चुके होंगे।

जामुनी एक वर्गाकार कागजी रुमाल खरीदना चाहती है लेकिन दुकानदार के पास सिर्फ आयताकार कागजी रुमाल हैं। नीचे दिए गए दो कागजी रुमालों को देखिए। कौनसा ज्यादा वर्गाकारनमा है और क्यों ?



यह सवाल शिक्षार्थियों से यह उम्मीद रखता है कि वे अपनी ज्यामितीय आकृतियों की समझ को समानुपात की समझ के साथ जोड़ कर देख पाएंगे। वर्ग में दोनों भुजाएं बराबर लंबाई की होती हैं, उसमें लंबाई तथा चौड़ाई का अनुपात 1:1 का होता है। लंबाई और चौड़ाई को अनुपात जितना 1:1 के करीब होगा, वह आकृति उतनी ही "वर्ग जैसी" नजर आने लगेगी। कोई भी व्यक्ति दोनों आकृतियों में लंबाई व चौड़ाई का अनुपात निकाल कर उनकी तुलना कर सकता है।

कोई भी व्यक्ति इससे आगे बढ़ कर पहली आकृति के साथ दूसरी आकृति की लंबाई की तुलना करके उनके आपसी संबंधों का पता लगा सकता है। ये आपस में समान हैं लेकिन एकदम समान नहीं हैं जैसा कि आंतरिक व बाहरी अनुपात में पाया जाता है। पैमानीकरण के आधार पर बनाई गई आकृति में लंबाई के साथ चौड़ाई के अनुपात को बरकरार रखा जाएगा और लंबाई के साथ लंबाई के अनुपात (पहले चित्र के साथ दूसरा चित्र) चौड़ाई के साथ चौड़ाई के अनुपात (पहले चित्र के साथ दूसरा चित्र) के समान होगा।

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- गतिविधि-1,2,3 व 4 में शिक्षार्थियों द्वारा इस्तेमाल की गई, गुणात्मक चिंतन वाली कार्यनीतियों में से कुछ के बारे में बताइए।
- इस अध्याय में दी गई गतिविधियों को करते हुए शिक्षार्थी एक दूसरे से किस किस्म की चीजों को सीखेंगे ?
- क्या आप सोचते हैं कि इस अध्याय में दी गई समस्याएं तथा संदर्भ शिक्षार्थियों की खुद की गुणात्मक चिंतन संबंधी समझ को मजबूत करने में मदद करेंगे ? क्या आप ऐसे ही कुछ और संदर्भों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें आनुपातिक तर्क का इस्तेमाल किया जाता हो ?
- इन गतिविधियों से जुड़े ऐसे पांच सवालों की सूची बनाइए, जिन्हें आप शिक्षार्थियों से पूछना पसंद करेंगे ताकि आप न सिर्फ यह जान सकें कि वे कितना सीखें हैं बल्कि यह भी समझ पाएं कि उनके साथ आनुपातिक तर्क पर की जाने वाली चर्चा को आगे बढ़ाने में किस तरह की मदद की जरूरत है।
- क्या आप कुछ और कामों को डिजाइन कर सकते हैं जो शिक्षार्थियों में गुणात्मक चिंतन के कौशलों को विकसित करने में मददगार हो सकें ?

**इकाई 2: गुणात्मक तर्क**  
**अध्याय 4: साहिर ने बनाया पोस्टर**

**अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)**

इकाई 2 के इस आखिरी अध्याय में एक फोटो को बड़ा करके पोस्टर बनाने के संदर्भ का इस्तेमाल किया गया है। इसी संदर्भ से जुड़ी कई और समस्याएं भी रखी गई हैं। शिक्षार्थी किसी आयत के हरेक आयाम में होने वाले बदलाव तथा उसकी वजह से उस आकृति के क्षेत्रफल में होने वाले बदलाव पर पड़ने वाले असर के बीच संबंधों की छानबीन करेंगे। खींचने (यानी स्ट्रेचिंग) तथा पैमाने पर बड़ा या छोटा करने (यानि स्केलिंग) में फर्क को रेखांकित किया जाएगा। इस अध्याय में आए रोजमर्रा की परिस्थितियाँ समानुपात के विचार को दैनिक जिंदगी के क्रियाकलापों के साथ जोड़ने में शिक्षार्थियों की मदद करेंगे।

**सीखने के उद्देश्य**

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- सतत मात्राओं की मदद से गुणात्मक तर्क का इस्तेमाल करना।
- आनुपातिक तर्क तथा गुणात्मक चिंतन को इस्तेमाल करना।

**काम और गणितीय प्रासंगिकता**

**गतिविधि-1:** यह काम आनुपातिक तर्क के खींचने वाले (स्ट्रेचिंग) पहलू पर दुबारा जोर देता है तथा सीधे अनुपात में एक और मापक के तौर पर आकृतियों के क्षेत्रफल को जोड़ता है।

**सवाल-1:** साहिर एक फोटो के आयामों को दुगुना करना चाहता है। बड़े किए गए फोटो के आयाम क्या होंगे ?

	लंबाई (सेमी.)	चौड़ाई(सेमी.)
फोटो	7	5
पोस्टर		

**सवाल-2:** फोटो के क्षेत्रफल तथा पोस्टर के क्षेत्रफल के बीच संबंध का पता लगाएं। इसके अलावा अगर आपने इन दोनों आकृतियों के बारे में कोई चीज काबिले जिक्र पाई हो तो उसे भी दर्ज करें।

**सवाल-3:** फोटो के आयामों को आपस में अदल-बदल कर लें, लंबाई को चौड़ाई बना दें तथा चौड़ाई को लंबाई बना दें। आप क्या देखते हैं ? दोनों फोटो की तुलना करें तथा इस बात की पहचान करें कि दोनों में क्या समानताएँ हैं और क्या अंतर है।

**सवाल-4:** एक मूल फोटो को पैमाने के आधार पर सही तरीके से बढ़ा कर उसकी चौड़ाई 20 सेमी. कर दी गई। पैमाने के आधार पर बढ़ाए गए फोटो की ऊंचाई का पता लगाइये जो कि मूल आकार का दुगुना है।

नई ऊंचाई : \_\_\_\_\_ सेमी.

**शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियाँ**

शिक्षार्थियों को इस बात के बारे में सोचने की जरूरत पड़ेगी कि हरेक आयाम को दुगुना करने पर क्षेत्रफल 4 गुना बढ़ जाएगा। आप शिक्षार्थियों के साथ अलग-अलग ज्यामितीय आकृतियों, जैसे, त्रिभुज तथा समानांतर चतुर्भुज का इस्तेमाल करते हुए, ऐसे और भी अभ्यास कर सकते हैं और उनके साथ आयामों में बदलाव तथा इससे उस आकृति के क्षेत्रफल पर पड़ने वाले असर के बारे में चर्चा कर सकते हैं।

आकृति के आयामों को आपस में अदल-बदल करने पर उसका क्षेत्रफल समान रहता है। लेकिन उस फोटो की छवि टेढ़ी-मेढ़ी हो जाती है।

समानुपात के विचार का इस्तेमाल करते हुए आप शिक्षार्थियों के साथ ऐसी ही और भी समस्याओं पर चर्चा कर सकते हैं।

**गतिविधि-2:** यहां पर, समानुपात की अवधारणा को मजबूत करने के लिए सरल रेखीय वृद्धि के एक दूसरे संदर्भ का इस्तेमाल किया गया है। वृद्धि की अवधारणा का इस्तेमाल आनुपातिकता के विचार में गतिशीलता पैदा कर देता है।

सवाल 1: अगर एक पौधा हर सप्ताह तीन गुना बढ़ता है तो वह पहले व दूसरे सप्ताह के आखिर में कितना ऊंचा हो जाएगा?

निर्देशात्मक लिखित सामग्री : पहले व दूसरे सप्ताह के आखिर में पौधे की वृद्धि दर्शाने के लिए जियोजेब्रा नामक सॉफ्टवेयर का इस्तेमाल करें।

सवाल 2: पौधे की शुरूआती ऊंचाई तथा दो सप्ताह बाद उसकी ऊंचाई में क्या संबंध है ?

- पौधे की ऊंचाई उसकी मूल ऊंचाई की 3 गुना होगी।
- पौधे की ऊंचाई उसकी मूल ऊंचाई की 6 गुना होगी।
- पौधे की ऊंचाई उसकी मूल ऊंचाई से 2 इकाई ज्यादा होगी।
- पौधे की ऊंचाई उसकी मूल ऊंचाई से 3 इकाई ज्यादा होगी।

जियोजेब्रा के औजार यानी टूल की मदद से, शिक्षार्थी इस सवाल की छानबीन कर सकते हैं और इसी तरह के दूसरे सवालों को भी हल करके देख सकते हैं। आप कुछ नई समस्याएं बना कर उन्हें दे सकते हैं जिसे वे जियोजेब्रा की मदद से हल करके देख सकें।

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- इकाई के आखिर में, आप क्या सोचते हैं कि शिक्षार्थी क्या-क्या समझ चुके होंगे ? कक्षा में घटी किन घटनाओं तथा शिक्षार्थियों के किस व्यवहार के आधार पर आपको यह भरोसा हुआ है ?
- आपकी नजर में शिक्षार्थियों के साथ किन गणितीय विचारों पर आगे और चर्चा करने की जरूरत है ?

### इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात

#### इकाई का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

इस इकाई में, शिक्षार्थी अनुपात की औपचारिक संकेतन यानी नोटेशन को समझने की शुरुआत करेंगे, जिसमें यह बताया जाएगा कि एक चीज की तुलना में दूसरी चीज कितनी है। शिक्षार्थी अपनी हिस्सेदारी/बंटवारे, बराबर बंटवारे तथा गुणात्मक चिंतन की समझ की बुनियाद पर अनुपात के साथ संख्यात्मक तौर पर तथा डिजिटली काम करेंगे। इस इकाई में व्यावहारिक के साथ साथ डिजिटल गतिविधियां भी शामिल की गई हैं। नीबू पानी में बर्फ के घनाकार टुकड़ों को मिलाने की डिजिटल गतिविधि, सीधे व विपरीत वेरियेशन के अपनी सूझ से बने विचारों को विकसित करने में शिक्षार्थियों की मदद करेगी। रोजमर्रा की जिंदगी के संदर्भों के साथ जुड़ाव शिक्षार्थियों की इस बात में मदद करेगा कि वे आनुपातिक तर्क की रोजाना की जिंदगी में सार्थकता तलाश पाएं। नक्शा बनाने जैसे व्यावहारिक काम शिक्षार्थियों को अनुपातों के इस्तेमाल के प्रति जागरूक करेंगे और उनकी प्रासंगिकता को रेखांकित करेंगे। शिक्षार्थियों को इस बात का मौका मिलेगा कि वे अनुपात की संकेत पद्धति के विचार तथा अलग-अलग कामों के जरिए एक से ज्यादा संदर्भों में सीधे व विपरीत (उलट) अनुपातों की छानबीन कर पाएं।

#### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- अनुपात की संकेत-पद्धति (संकेतन) को पढ़ना व उसका सटीक इस्तेमाल कर पाना तथा सार्थक संदर्भों में उसके इस्तेमाल को समझा पाना।
- सीधे व विपरीत (उलट) वेरियेशन को शामिल करते हुए अनुपात के विचार को समझा पाना व उसे इस्तेमाल कर पाना।
- सीधे व विपरीत (उलट) आनुपातिक विचारों को विविध तरह के संदर्भों में इस्तेमाल करते हुए समस्याओं को हल कर पाना।

#### इकाई का विवरण

क्र.	अध्याय का नाम	अध्याय का प्रकार	अध्याय का वर्णन
1	अनुपात की संकेत-पद्धति (संकेतन) समझना	कार्य-पत्रक (वर्कशीट)	इस अध्याय में, जामुनी अपने अनुपात तथा समानुपात संबंधी ज्ञान को अपने आस-पास की चीजों पर इस्तेमाल करना शुरू करती है। उसकी निगाह अपने आस-पास के कई अनुपातों पर पड़ती है, वह उन्हें दर्ज कर लेती है और उन पर सवाल बनाती है। ऐसा ही अनुभव हमारे शिक्षार्थियों को भी मिलना चाहिए ताकि वे अपने आस-पास पाई जाने वाली मात्राओं में अनुपात को देखना शुरू कर सकें। यह अध्याय दैनिक जीवन के साथ शिक्षार्थियों की गणितीय अंतःक्रिया को वैधता प्रदान करता है।
2	जामुनी के साथ नक्शा पढ़ना	व्यावहारिक	इस अध्याय में, जामुनी नक्शों को पढ़ना व उनका इस्तेमाल करना सीखती है। जामुनी की मदद करने के दौरान शिक्षार्थी पैमानीकरण के आधार पर, नक्शे की मदद से असली दूरी का पता लगाते हैं। शिक्षार्थी जामुनी की मदद करते वक्त पैमानीकरण तथा खींचने की अवधारणाओं का भी इस्तेमाल कर सकते हैं। इसे करने के लिए उन्हें पैमाना मानने तथा गुणात्मक तर्क को समझना पड़ेगा ताकि वे दो जगहों के बीच की दूरी का पता लगा सकें और इसका उलट भी कर सकें।

2	पट्टियों के इस्तेमाल से लंबाई का पता लगाना	व्यावहारिक	शिक्षार्थी एक बार फिर से स्थानिक मोड में पैमानीकरण तथा खींचने के विचारों पर काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में व्यक्त करना सीखते हैं। अध्याय की शुरुआत में शिक्षार्थी कागज की पट्टियों की तुलना करके उनके बीच पाए जाने वाले गुणात्मक संबंध का पता लगाते हैं। अलग-अलग इकाइयों का इस्तेमाल करके मापन करते हैं, और इससे शिक्षार्थी एक इकाई तथा एक पूरे के बीच के संबंधों पर सोचने के लिए मजबूर होते हैं और इससे आगे बढ़ कर यह भी देखते हैं कि ये संबंध सीधे यानी प्रत्यक्ष आनुपातिक हैं या उलट (विपरीत) आनुपातिक हैं।
3	नीबू पानी में बर्फ के टुकड़े	डिजिटल	यह आयतन के विचार पर आधारित एक डिजिटल गतिविधि है। शिक्षार्थी जामुनी की यह तय करने में मदद करेंगे कि किसी चीज को आनुपातिक तौर पर बराबर या गैर-बराबर करने के लिए बर्फ के कितने टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

### काम और गणितीय प्रासंगिकता

**गतिविधि-1:** गणित में इस्तेमाल की जाने वाली कई दूसरी संकेत-पद्धतियों (संकेतण) की तुलना में अनुपात को दर्शाने वाली संकेतण गैरमामूली तौर पर अलग है। दो मात्राओं A तथा B के बीच तुलना को A:B के रूप में व्यक्त किया जाता है। संकेतण A:B भागफल को दर्शाती है जब A में B का भाग दिया जाता है। अनुपात अक्सर एक ही प्रकार की मात्रा के लिए लिखे जाते हैं। एक जरूरी बात हमें शिक्षार्थियों तक पहुंचानी है कि यह तुलना योगात्मक नहीं है। उदाहरण के लिए, जामुनी का वजन 25 किलो है और उसके पिता का वजन 75 किलो है। इस मामले में जामुनी व उसके पिता के वजन के अनुपात को इस तरह से दर्शाया जाएगा - 25:75 और यह अनुपात  $75 - 25 = 50$  नहीं होगा बल्कि 25 भाजक 75 होगा। अनुपात को समझने के लिहाज से यह अंतर काफी महत्वपूर्ण है। इन दो संख्याओं के बीच का संबंध गुणात्मक है।

इस गतिविधि में जामुनी तथा उसके दोस्तों को अपने अवलोकन के आधार पर अनुपात लिखने हैं।

सामने वाले स्तम्भ में दिए गए उदाहरणों की मदद से समझाने के बाद शिक्षार्थियों को कार्य-पत्रक में दी गई समस्याओं को हल

### शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां

जामुनी की ही तरह अपने शिक्षार्थियों से कहें कि वे अपने आस-पास की जिंदगी में पाए जाने वाले अनुपातों पर ध्यान दें, और उन अनुपातों को मौखिक के साथ साथ लिखित तौर पर भी व्यक्त करने के लिए कहें। अगर उन्हें किसी किस्म की कोई मुश्किल पेश आए तो रेखाचित्र बना कर उनकी मदद करें। यहां पर ऐसा ही एक उदाहरण दिया गया है। आप एक या दो उदाहरणों की मदद से संकेत-पद्धति में लिखे हुए अनुपात को समझाने के लिए उन्हें शब्दों में बोल कर बता समझा सकते हैं।

- '3 नीले वर्गों के लिए 1 पीला वर्ग है' को इस तरह से दर्शाया जा सकता है :

3 : 1



- एक किसान 4 गाएं तथा 8 सूअर बेच रहा है। तो गायों व सूअरों का अनुपात 4:8 होगा।

<p>करने को कहा जा सकता है।</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• एक विशाल पहिए में हर दो लड़कियों के साथ एक लड़का है।</li> <li>• एक किसान के पास बेचने के लिए 2 बकरे और 10 मुर्गियां हैं।</li> <li>• लीना की माता उसकी तुलना में 3 गुना ऊंची है। (आप यहां पर इस बात पर जोर दे सकते हैं कि ऊंचाई एक सतत मात्रा है जबकि इससे पहले की दो समस्याओं में असतत मात्राएं काम में ली गई हैं।)</li> <li>• जियो लंबाई में इंस्पेक्टर काटा से <math>2\frac{1}{2}</math> गुना छोटा है। (आप इस अनुपात को कई तरीकों से दर्शा सकते हैं - <math>2\frac{1}{2}:1</math>, or <math>5:2</math>, or <math>2.5:1</math>.)</li> </ul>	
<p><b>गतिविधि-2:</b> अनुपात संकेतण की व्याख्या करना एक चुनौतीपूर्ण काम है क्योंकि अनुपात को पढ़ने में जिस भाषा का इस्तेमाल किया जाता है, उसे गणित की दूसरी कई सारी अवधारणाओं जैसे, संभावना, संभाव्यता तथा भिन्न, में इस्तेमाल की जाती है। हमें शिक्षार्थियों द्वारा की गई अलग-अलग व्याख्याओं के प्रति सचेत रहने की जरूरत है।</p> <p>मेले में वीडियो गेम के कमरे में 27 बच्चे हैं। उनमें लड़कियों तथा लड़कों का अनुपात 3:6 है। नीचे दिए गए कथनों में से कौनसा या कौनसे कथन सही हैं ?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• लड़कों तथा लड़कियों का अनुपात 6:3 है।</li> <li>• वीडियो गेम के कमरे में आधे बच्चे लड़कियां हैं।</li> <li>• हम वीडियो गेम के कमरे में मौजूद लड़कों की एकदम सटीक संख्या जानते हैं।</li> <li>• हम वीडियो गेम के कमरे में मौजूद लड़कियों की एकदम सटीक संख्या जानते हैं।</li> <li>• अगर हम मनमाने यानी यादच्छिक तरीके से 9 बच्चों को चुनें तो हम यह उम्मीद कर सकते हैं कि उनमें से 3 लड़कियां होंगी।</li> <li>• हम यह गणना कर सकते हैं कि वीडियो गेम के कमरे में कितने लड़के हैं, अगर उसमें कुल 35 बच्चे मौजूद हैं और उनका लैंगिक अनुपात उतना ही है जितना ऊपर के सवालों में दिया गया है।</li> </ul>	<p>एक बार फिर से, यहां पर विविध संदर्भों तथा हालातों को देने की कोशिश की गई है ताकि शिक्षार्थियों में, विविध तरह के संदर्भों में अनुपात व समानुपात की समझ को विकसित हो पाए।</p> <p>शिक्षार्थियों की समझ पर नजर रखने के लिए नीचे दी गई पूरक गतिविधियां की जा सकती हैं।</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• शिक्षार्थियों को कुछ अनुपात दें तथा उन्हें अपने आस-पास का कोई एक हालात डिजाइन करने को कहें। यह उन कामों का उलट है जो वे पहले कर रहे थे। इस गतिविधि से जुड़ने से उन्हें यह समझ में आएगा कि असली जिंदगी की चीजों को किस तरह से अनुपात की मदद से व्यक्त किया जाता है।</li> <li>• अपने शिक्षार्थियों से कहें कि वे अखबारों की कतरनें लाएं जिनमें अनुपात की संकेत-पद्धति का इस्तेमाल किया गया हो। उन्हें समझाने दें कि उनमें अनुपातों का इस्तेमाल कैसे किया गया है।</li> <li>• बहुत सारी चीजों, जैसे सिर में लगाने वाला तेल, क्रीम, मंजन आदि के डिब्बों पर, उनमें पाए जाने वाली चीजों के नाम लिखे होते हैं। अध्यापक उन मात्राओं को अनुपात में व्यक्त करने के लिए कह सकते हैं।</li> </ul>

**गतिविधि-3:** यह सवाल आकलन करने के लिए है। शिक्षार्थी इस पर अपने आप काम करेंगे।

मेले में लगे सर्कस के एक तंबू में 100 व्यक्ति बैठ सकते हैं। वह दो भागों में बंटा हुआ है। पहले भाग में 30 सीटें हैं और दूसरे भाग में 70 सीटें हैं। शो देखने के लिए कुल 80 व्यक्ति आए और पहले भाग की सभी सीटें भर गई थी।

- पहले तथा दूसरे भाग में सीटों का अनुपात क्या है ?
- तंबू में खाली सीटों तथा भरी सीटों का अनुपात क्या है ?
- दूसरे भाग में खाली सीटों और भरी सीटों का अनुपात क्या है ?

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- शिक्षार्थियों की बराबर तथा गैर-बराबर अनुपात की समझ की जांच करने के लिए आकलन के दो सवाल बनाएं। इस बात का पूरा ख्याल रखें कि सवाल में परिचित संदर्भों को इस्तेमाल किया जाए।
- इस कार्य-पत्रक का इस्तेमाल करते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आने वाली चुनौतियों का वर्णन करें।
- उच्च प्राथमिक स्कूली स्तर के दो ऐसे प्रकरण बताइए जो आपके विचार से अनुपात तथा समानुपात के विचार से जुड़े हैं। समझाइये कि वे इस विचार से किस तरह से जुड़े हैं।



### इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात अध्याय 2: जामुनी ने पढा नक्शा

#### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

गुणात्मक चिंतन की प्रक्रिया ऐसे हालातों के साथ जुड़ी रहती है जिनमें न्यायपूर्ण हिस्सेदारी/बंटवारा, पैमानीकरण, खींचना, नकल बनाना तथा घातांक शामिल होते हैं। बराबर हिस्सेदारी तथा साझेदारी से जुड़े सवाल शिक्षार्थियों के विचारों को मजबूत करने के साथ यह इकाई पैमाना बनाने के विचार को संबोधित करती है। साथ ही, संख्यात्मक के साथ-साथ स्थानिक संबंधों में नक्शों को पढ़ने में उस विचार को इस्तेमाल करने पर भी काम करती है। इस अध्याय की शुरुआत में, जामुनी नक्शे को पढ़ने व उसमें पैमाने का इस्तेमाल करने पर काम करती है। आखिरकार वह नक्शे पर दिए गए चित्रों को समझने तथा पैमाना मान कर उस पर भी काम करती है। नक्शे पर पैमाने का इस्तेमाल करना समान अनुपातों के लिए एक और संदर्भ मुहैया करवाता है। नक्शे पर, पैमाने तथा असली दूरी के बीच समान अनुपात होता है।

#### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- किसी नक्शे में दर्शायी गई दूरी को नापना तथा पैमाने का इस्तेमाल करके उसके तुल्य असली दूरी का पता लगाना।
- नक्शा बनाना तथा पैमाना मान कर उसका स्थानिक तथा संख्यात्मक संदर्भों में इस्तेमाल करना।
- पैमानीकरण-खींचना तथा सिकुड़ने की अवधारणा का इस्तेमाल करना।
- गुणक की अवधारणा को पढ़ना तथा लिखना तथा एक गुणक की मदद से गुणात्मक तर्क की शुरुआत करना और दिए गए पैमाने की मदद से दो जगहों के बीच की दूरी का पता लगाना व इसका उलट काम करना।
- पैमानीकरण तथा फैक्टर की गहरी समझ विकसित करने के लिए कक्षा में होने वाली चर्चा में भागीदारी करना।

#### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

**काम और गणितीय प्रासंगिकता**

**शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां**

**गतिविधि-1:** इस सवाल में शिक्षार्थियों को इस बात का मौका मिलेगा कि वे पैमानों की मदद से दूरी का मापन कर सकें। उन्हें पैमाने के विचार से परिचित करवाया जाएगा। नक्शे पर पैमाने का मतलब होता है कि नक्शे में दो जगहों के बीच की दूरी के साथ असल दुनिया में उन जगहों के बीच दूरी के साथ अनुपात। यह अनुपात पूरे नक्शे में एक समान होता है।

नक्शों पर आम तौर पर गणित की कक्षाओं में न तो बातचीत की जाती है न ही उन पर काम किया जाता है। नक्शों का गणित में इस्तेमाल करना इस माॅड्यूल का अनूठा प्रयास है। नक्शे में पैमाने की अवधारणा इस बात का मौका मुहैया करवाती है कि हम नक्शे पर दी गई दूरी का असली दूरी के साथ अनुपात निकाल पाएं। इस बात की बहुत संभावना है कि शिक्षार्थी पहले सवाल में, नक्शे पर लंबाई मापने की अलग-अलग कार्यनीतियों का इस्तेमाल करें। अध्यापक को उन कार्यनीतियों पर चर्चा करनी चाहिए जो नक्शे पर करीब करीब सही दूरी बता सके। नक्शे को पढ़ना कोई आम कौशल नहीं है। अलग-अलग दूरियों को नापने में शिक्षार्थियों को थोड़ा वक्त लगाने दें तथा उसमें से उन्हें पैमाने के विचार को निकालने दें। कक्षा में नीचे दी गई बातों पर चर्चा करें :

- पैमाना लेना क्यों महत्वपूर्ण है ?
- अगर असली दूरियों तथा नक्शे पर दी गई दूरियों के बीच अनुपात पूरे नक्शे में एक समान न हो तो क्या होगा ?
- पैमाने के विचार को नक्शे में काम में लेने का क्या कोई दूसरा तरीका भी होता है ?
- नक्शे कैसे बनते हैं ?

इसके बाद शिक्षार्थी अलग-अलग पैमानों को लेकर अभ्यास करें तथा संख्यात्मक गणनाएं करके असली दूरी का पता लगाएं। हरेक मौके पर शिक्षार्थियों से पूछें कि उन्होंने दूरी का पता कैसे लगाया और पैमाने का इस्तेमाल कैसे किया।

**गतिविधि-2:** यह पहली गतिविधि का ही विस्तार है, जिसमें शिक्षार्थी पैमानीकरण के विचार को संख्यात्मक संदर्भों में समझते हैं।

नक्शे पर पैमानीकरण को शिक्षार्थी पैमाने के गुणक से गुणा के तौर पर समझते हैं। शिक्षार्थियों के जवाबों का अनुमान लगा कर नीचे दी गई सारणी भरिए।

	धागे की लंबाई	असली दूरी
नक्शे का पैमाना (1:25000)	10 सेमी.	
	18 सेमी.	
नक्शे का पैमाना (1 सेमी. = 2.5 किमी.)	12 सेमी.	
	21 सेमी.	

यहां पर, नक्शे पर दो शहरों के बीच की दूरियों को धागे की लंबाई से नाप कर दिया गया है। इसमें एक पैमाना बहुत बड़ा है और दूसरा दशमलव वाला पैमाना है। यह जान बूझ कर दिया गया है ताकि शिक्षार्थी अलग-अलग नक्शों पर आम तौर पर पाए जाने वाले पैमानों को समझ पाएं।

**गतिविधि-3:** गणितीय तौर पर, यह गतिविधि अज्ञात राशि वाले अनुपात की समस्याओं जैसी ही है। इसमें शिक्षार्थी या तो नक्शे पर अज्ञात दूरी या असली दूरी का या फिर पैमाने का पता लगाते हैं।

समान अनुपात की सामान्य समस्याएं, जिनमें समान अनुपात को दर्शाने में चार मात्राओं का इस्तेमाल किया जाता है, उसकी तुलना में इस सारणी में शिक्षार्थी छह मात्राओं पर काम करेंगे। इसलिए यह समस्या शिक्षार्थियों के लिए थोड़ी मुश्किल होगी। पैमाने को निर्धारित करना अनुपात को निर्धारित करने जैसा ही है, जबकि दूरी को निर्धारित करना, दिए गए अनुपातों में अज्ञात राशि को निर्धारित करने जैसा है। शिक्षार्थी संख्यात्मक संदर्भों में ज्यामितीय पैमानेकरण के विचार को भी सीखेंगे।

**गतिविधि-4:** जामुनी को एक दोषपूर्ण नक्शा देकर उसमें गलती तलाशने के लिए कहा गया। पिछली तीन गतिविधियों के दौरान शिक्षार्थियों की बनी हुई समझ का इस्तेमाल करने के लिए यह समस्या दी गई है।

जामुनी से पाया कि चार अलग-अलग नक्शों में दूरी का पैमाना अलग-अलग तरह से प्रस्तुत किया गया है। शिक्षार्थियों से यह उम्मीद की जाती है कि वे उस नक्शे को पहचानने में जामुनी की मदद करें जिसमें शहर A तथा B की दूरी बाकी सभी नक्शों से अलग है।

नक्शा	A तथा B के बीच नक्शे में दूरी	नक्शे का पैमाना	पैमानेकरण के आधार पर A तथा B के बीच की दूरी
नक्शा	125 सेमी.	1:600	
नक्शा	212 सेमी.	1:1250	
नक्शा	324 सेमी.	3:1800	
नक्शा	430 सेमी.	5:2500	

दोषपूर्ण नक्शे को पहचानने के लिए यह पता लगाना है कि किस नक्शे में दिए गए नापों से मिलने वाली असली दूरी दूसरे नक्शों से मिलने वाली असली दूरी के साथ मेल नहीं खा रही है।

### इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात अध्याय 3: पट्टियों की मदद से लंबाई का पता लगाना

#### अध्याय का ओवरव्यू

शिक्षार्थी एक बार फिर से, स्थानिक मोड में पैमानीकरण तथा खींचने के विचारों पर काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी अनुभव आधारित समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में हस्तांतरित करना सीखेंगे। इस अध्याय की शुरुआत में, कागज की पट्टियों की आपस में तुलना करके उनके बीच के गुणात्मक संबंधों का पता लगाएंगे। अलग-अलग इकाइयों की मदद से मापन किया जाएगा, जिसकी वजह से शिक्षार्थियों को एक इकाई तथा एक पूरे के बीच के संबंधों के बारे में सोचना पड़ेगा, और इससे भी आगे जाकर यह समझा जाएगा कि ये संबंध या तो सीधे आनुपातिक हो सकते हैं या उलट आनुपातिक हो सकते हैं।




#### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- कागज की पट्टी को इकाई मानते हुए लंबाई को मापना।
- इस बात को समझाना कि मापन में अगर इकाई छोटी हो तो किसी दूरी को मापने में ज्यादा इकाइयों की जरूरत क्यों पड़ती है।
- प्रत्यक्ष तथा उलट आनुपातिक विचारों पर आधारित मापन की इकाइयों को जोड़ तोड़ करके काम ले पाना।
- सीधे व उलट वेरियेशन के विचारों का इस्तेमाल करना।

#### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ(यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

काम और गणितीय प्रासंगिकता	शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां
<p><b>गतिविधि-1:</b> इस गतिविधि में, कुछ शिक्षार्थी कागज की एक पट्टी को कागज की तीन अलग-अलग लंबाई की पट्टियों की मदद से मापेंगे, इसका मतलब यह है कि वे मापने में अलग अलग इकाइयों का इस्तेमाल करेंगे। अब इस जानकारी का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थी इस औजार का इस्तेमाल करके मापी गई कागज की पट्टी की लंबाई का पता लगाएंगे। इस पर काम करते वक्त शिक्षार्थी गुणकों तथा सामान्य गुणकों के विचारों का इस्तेमाल करेंगे।</p>	<p>इस समस्या में दर्शाए गए तीन शिक्षार्थी, दी गई पट्टी के तीन अलग-अलग माप निकालते हैं। इसकी वजह यह है कि वे तीनों मापने के लिए अलग-अलग पट्टी का मापन की इकाई की तरह इस्तेमाल करते हैं। नीचे दी गई जानकारी के आधार पर, पहले शिक्षार्थियों को यह पता लगाना है कि किसने किस रंग की पट्टी काम में ली और फिर उस कागज की पट्टी की लंबाई का पता लगाना है।</p> <p>4 सेमी. </p> <p>8 सेमी. </p> <p>2 सेमी. </p> <p>अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 8 पट्टियों के बराबर है। अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 16 पट्टियों के बराबर है। अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 4 पट्टियों के बराबर है।</p>

शिक्षार्थियों को यहां मापन के संरक्षण को समझाना पड़ेगा कि अलग-अलग पैमाने या अलग-अलग इकाई से मापने का यह मतलब नहीं है कि मापे जा रहे कागज की लंबाई बदल जाती है। मापे जा रहे कागज की लंबाई वही रहेगी चाहे पैमाना कुछ भी हो। ऊपर दी गई जानकारी हमें यह बताती है कि किसी चीज का 8 गुना, या किसी चीज का 16 गुना, या किसी चीज का 4 गुना - यह तीनों ही एक समान मात्रा का माप हो सकता है। अगर किसी चीज को मापने के लिए एक पट्टी की 16 बार जरूरत पड़ती है और उसी चीज को दूसरी पट्टी से 4 बार में मापा जा सकता है तो पहली पट्टी जरूर दूसरी की तुलना में बहुत छोटी होनी चाहिए। इसीलिए हम यह पूर्वानुमान लगा सकते हैं कि लंबी पट्टी को मापने के काम में ले रही है। इसलिए दी गई कागज की पट्टी (2 सेमी. × 16 = 32) सेमी. लंबा है। यहां पर चुनौती यह देखना है कि क्या शिक्षार्थी पहले अलग अलग इकाइयों द्वारा मापने के संदर्भ में दिए गए कागज की लंबाई बराबर मानता है या नहीं। अगर वे ऐसा नहीं करते तो उनसे पूछिए के मापने के पैमाने को बदलने पर माप किस तरह से बदल सकता है। यानी मापने की इकाई को बदलने से जिस कागज की पट्टी को मापना है उसकी लंबाई कैसे बदल जाएगी। और, यह किस तरह का बदलाव होगा ? इस तरह की समस्याओं पर गणित में कैसे काम किया जाता है ? (उदाहरण के लिए, सार्वभौमिक पैमाना)

**गतिविधि-4:** यह गतिविधि पिछली सभी गतिविधियों का समेकन है। शिक्षार्थी कागज की पट्टियों को इकाई मान कर उनकी मदद से एक कागज की लंबाई मापेंगे। प्रत्यक्ष व उलट वेरियेशन के विचार पर दोबारा जोर दिया जाएगा।

इस गतिविधि में, शिक्षार्थी एक पट्टी को मापेंगे तथा इकाई के आकार तथा इकाई की लंबाई में संबंध पता लगाएंगे।

पट्टी की लंबाई (l)	इस्तेमाल की गई पट्टियों की संख्या (n)	$l \times n$	$l/n$

यह गतिविधि अनुपात के स्थिरांक तथा अनुपात की समझ के बीच पुल बनाने का काम करती है। यहां पर इस्तेमाल किए गए शिक्षाशास्त्रीय अभ्यास सारणी के लिए, अलग-अलग पट्टियों की मदद से अलग-अलग आंकड़े इकट्ठे करते हैं और उसके बाद यह पता लगाते हैं कि कौनसी चीज स्थिर रहती है। फिर शिक्षार्थी तथा अध्यापक मिल कर इस बात पर चर्चा करते हैं कि वह स्थिर क्यों रहता है। कक्षा में अध्यापक कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं :

- जब मापने वाली पट्टी छोटी होती है तब क्या होता है ?
- जब मापने वाली पट्टी लंबी होती है तब क्या होता है?
- वो क्या चीज है जो समान रहती है और क्यों ?

चर्चा के आखिर में, शिक्षार्थियों को समझाएं कि सारणी में दी गई मात्राएं किस तरह से उलट आनुपातिक हैं। एक मात्रा के घटने से दूसरी मात्रा कैसे बढ़ जाती है, और कौनसी मात्रा में कोई फेरबदल नहीं होता, ये सारी बातें उलट अनुपात को समझने के लिहाज से काफी महत्वपूर्ण हैं।

**गतिविधि-3:** यह गतिविधि, गतिविधि-1 की उलट है। इसमें मापन की इकाई को समान रखा जाता है, और अलग-अलग बच्चों द्वारा अलग-अलग पिट्टियों को मापा जाता है। गणितीय तौर पर, शिक्षार्थी प्रत्यक्ष अनुपात सीखेंगे जिसमें मापने वाली पिट्टियों की संख्या जितनी ज्यादा होगी, मापी गई पट्टी भी उतनी ही लंबी होगी।

यह गतिविधि प्रत्यक्ष अनुपात का दर्शाने के लिए है। शिक्षार्थी मापेंगे और यह पता लगाएंगे कि अगर मापी जाने वाली पट्टी बड़ी हो तो समान आकार की इकाई से मापते वक्त ज्यादा इकाइयों की जरूरत पड़ती है, और अगर मापी जाने वाली पट्टी छोटी हो तो समान आकार की इकाइयों की कम जरूरत पड़ती है। मापी जाने वाली पट्टी की लंबाई इकाई की पिट्टियों की संख्या के बदलने के साथ बदलती रहती है और इससे हमें प्रत्यक्ष अनुपात को समझाने का मौका मिलता है।

**गतिविधि-4:**

यह गतिविधि पिछली सभी गतिविधियों का समेकन है। शिक्षार्थी कागज की पिट्टियों को इकाई मान कर उनकी मदद से एक कागज की लंबाई मापेंगे। प्रत्यक्ष व उलट वेरियेशन के विचार पर दोबारा जोर दिया जाएगा।

इस गतिविधि में, शिक्षार्थी एक पट्टी को मापेंगे तथा इकाई के आकार तथा इकाई की लंबाई में संबंध पता लगाएंगे।

पट्टी की लंबाई (l)	इस्तेमाल की गई पिट्टियों की संख्या (n)	$l \times n$	$l/n$

यह गतिविधि अनुपात के स्थिरांक तथा अनुपात की समझ के बीच पुल बनाने का काम करती है। यहां पर इस्तेमाल किए गए शिक्षाशास्त्रीय अभ्यास सारणी के लिए, अलग-अलग पिट्टियों की मदद से अलग-अलग आंकड़े इकट्ठे करते हैं और उसके बाद यह पता लगाते हैं कि कौनसी चीज स्थिर रहती है। फिर शिक्षार्थी तथा अध्यापक मिल कर इस बात पर चर्चा करते हैं कि वह स्थिर क्यों रहता है। कक्षा में अध्यापक कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं :

- जब मापने वाली पट्टी छोटी होती है तब क्या होता है ?
- जब मापने वाली पट्टी लंबी होती है तब क्या होता है?
- वो क्या चीज है जो समान रहती है और क्यों ?

चर्चा के आखिर में, शिक्षार्थियों को समझाएं कि सारणी में दी गई मात्राएं किस तरह से उलट आनुपातिक है। एक मात्रा के घटने से दूसरी मात्रा कैसे बढ़ जाती है, और कौनसी मात्रा में कोई फेरबदल नहीं होता, ये सारी बातें उलट अनुपात को समझने के लिहाज से काफी महत्वपूर्ण है।

### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

1. प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष या उलट अनुपात के हालातों को समझते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आई चुनौतियों बताइए।
2. प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष या उलट अनुपात के हालातों में क्या समान रहता है और क्या बदलता है, समझाइए।
3. ऐसे हालात का डिजाइन कीजिए जिसमें शामिल मात्राएं प्रत्यक्ष आनुपातिक हों और दूसरे परिस्थिति में मात्राएं उलट आनुपातिक हों।
4. सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
  - इस अध्याय पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

### इकाई 3 : अनुपात तथा समानुपात अध्याय 4: नीबू पानी में बर्फ के टुकड़े

#### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

शिक्षार्थी एक बार फिर से, पैमानीकरण, खींचने के विचारों पर स्थानिक मोड में काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी अनुभव आधारित समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में हस्तांतरित करना सीखेंगे। यह आयतन पर आधारित एक डिजिटल गतिविधि है। शिक्षार्थी मात्राओं को या तो आनुपातिक तौर पर बराबर या गैर-बराबर बनाने के लिए बर्फ के टुकड़ों की संख्या को तय करने में जमुनी की मदद करेंगे। अलग-अलग आकार के बर्फ के टुकड़ों का इस्तेमाल करते हुए तथा हरेक गिलास में नीबू पानी के आयतन को प्रतिशत में व्यक्त करने जैसे विचारों को इस्तेमाल करते हुए यह गतिविधि शिक्षार्थियों की समझ के सामने चुनौतियां पेश करेगी।

#### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग मुहैया करवाते हैं।

काम और गणितीय प्रासंगिकता	शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां												
<p><b>गतिविधि-1:</b> इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों को इस बात से परिचित करवाना है कि जब एक गिलास नीबू पानी में बर्फ मिलाया जाता है तो क्या होता है, खास तौर पर तब क्या होता है जब दो अलग-अलग आकार के बर्फ के टुकड़े मिलाए जाते हैं।</p>	<p>दो प्रकार के बर्फ के टुकड़े हैं। एक टुकड़े का आयतन 2 घन सेमी. है और दूसरे टुकड़े का आयतन 1 घन सेमी. है। हरेक समस्या के लिए शिक्षार्थी बर्फ के टुकड़े चुनेंगे। ऐसा करने के लिए उन्हें गिलास में भरे नीबू पानी के आयतन पर पड़ने वाले असर का पूर्वानुमान लगाना पड़ेगा। अगर नीबू पानी गिलास से बाहर निकल गया तो समस्या को दुबारा शुरू किया जाता है।</p> <p>इस गतिविधि में शिक्षार्थियों का अंदाजा महत्वपूर्ण होता है क्योंकि इसमें उनकी दृश्यात्मक के साथ-साथ आयतन की अवधारणा की अवधारणात्मक समझ को भी गूँथना पड़ता है। बर्फ के टुकड़ों के अलग-अलग आकार भी शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देते हैं कि वे प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष बदलावों को देख सकें।</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>बर्फ के टुकड़ों का आकार</th> <th>बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)</th> <th>s x n</th> <th>s / n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2 घन सेमी.</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>2/3</td> </tr> <tr> <td>1 घन सेमी</td> <td>6</td> <td>6</td> <td>1/6</td> </tr> </tbody> </table> <p>प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष वेरियेशन की समझ बनाने के लिए, शिक्षार्थी सारणी में आए पैटर्न का वर्णन करें। चूँकि गिलास का आकार तय है इसलिए उसका आयतन हमेशा बराबर रहेगा। इसका मतलब यह है कि बर्फ के टुकड़ों की संख्या और बर्फ के टुकड़ों का आकार हमेशा एक दूसरे का उलट अनुपाती रहेगा। दूसरी तरफ हरेक बर्फ के टुकड़े का आयतन उसके आकार के साथ प्रत्यक्ष अनुपाती रहेगा।</p>	बर्फ के टुकड़ों का आकार	बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)	s x n	s / n	2 घन सेमी.	3	6	2/3	1 घन सेमी	6	6	1/6
बर्फ के टुकड़ों का आकार	बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)	s x n	s / n										
2 घन सेमी.	3	6	2/3										
1 घन सेमी	6	6	1/6										



**गतिविधि-2:** यह गतिविधि पहले वाले संदर्भ का ही इस्तेमाल करती है और प्रतिशत की अवधारणा का इस्तेमाल करके उसका विस्तार करती है। भरी हुई गिलास का आयतन प्रतिशत में दिया गया है। शिक्षार्थियों को गिलास के बचे आयतन का प्रतिशत में पता लगाना है और यह तय करना है कि बर्फ के कितने टुकड़े डालने हैं। गणितीय तौर पर, जब एक मात्रा प्रतिशत में और दूसरी आयतन में दी गई हो, तो यह पेचीदापन हालातों को समान बनाता है।

यहां पर गिलासों का आकार बड़ा है। अमन और जामुनी अभी भी प्यासे हैं और इस बार वे नीबू पानी के बड़े गिलास खरीदते हैं। पांच मिनट के बाद, जामुनी के गिलास में नीबू पानी 40% तक भरा है जबकि अमन के गिलास में नीबू पानी 70% भरा है। सारी बर्फ पिघल चुकी है क्योंकि गर्मी बेतहाशा पड़ रही है। शिक्षार्थियों को जामुनी की मदद करनी है ताकि वह और बर्फ मिला कर गिलास को किनारे तक भर ले।

प्रतिशत	गिलास में भरा जाने वाला आयतन(v)	मिलाए गए बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)	v x n	v/n
	60	18		
	30	9		

डिजिटल संसाधन पर काम करने से शिक्षार्थियों को, बर्फ के जितने टुकड़े जोड़ने की जरूरत होगी, उनकी संख्या मिल जाएगी। हालांकि, इस गतिविधि का महत्वपूर्ण हिस्सा, इन संख्याओं के संदर्भ में यह समझना है कि इस संदर्भ में कितने बर्फ के टुकड़े जोड़े गए हैं।

चर्चा के आखिर में, शिक्षार्थियों को यह समझाएं कि सारणी में दी गई मात्राएं प्रत्यक्ष अनुपात में हैं। प्रत्यक्ष अनुपात को समझने के लिए यह समझना महत्वपूर्ण होता है किसी एक मात्रा को बढ़ाने से दूसरी मात्रा कैसे बढ़ जाती है और वो क्या चीज है, जो स्थिर रहती है। शिक्षार्थियों को जवाब देना चाहिए कि 40% भरी हुई गिलास को किनारे तक पूरी भरने के लिए उन्हें बर्फ के 18 टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी, और 70 % भरी हुई गिलास को भरने के लिए उन्हें बर्फ के 9 टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी। इस संदर्भ में, गिलास के खाली हिस्सों को भरने के लिए जरूरी बर्फ के टुकड़ों की संख्या, गिलास में पहले से मौजूद नीबू पानी के आयतन के साथ उलट अनुपात में होगी। इसके साथ ही, अध्यापक शिक्षार्थियों से नीचे दिए गए सवाल यह जानने के लिए पूछ सकते हैं कि उन्होंने संदर्भ सहित गणित को कितना समझा है :

- नीबू पानी के गिलास का आयतन कितना है ?
- गिलास के आयतन का 40% कितना होगा ?
- 40% भरे गिलास को पूरा भरने के लिए बर्फ के कितने टुकड़ों की जरूरत पड़ी ?
- इस जानकारी के आधार पर, क्या आप बर्फ के हरेक टुकड़े का आयतन निकाल सकते हैं ? इसका पता लगाने की प्रक्रिया क्या है ?

**गतिविधि-3:** यहां पर हम गणित सीखने के नजरिए से एक महत्वपूर्ण कदम उठाते हैं। हम उसी अवधारणा के बारे में सवाल पूछते हैं लेकिन उसका संदर्भ बदल देते हैं। यह जरूरी है कि शिक्षार्थी अपने विचारों को एक संदर्भ से दूसरे संदर्भ में ठीक से इस्तेमाल कर पाएं ताकि अवधारणा के सार को रेखांकित करके सीखा जा सके।

किए गए काम तथा काम में लगने वाले घंटों के संदर्भ को आम तौर पर उलट अनुपात में काम में लिया जाता है, इसके साथ किया गया काम स्थिर होता है। यहां पर एक आकलन का सवाल भी है, जिसमें हम यह जांच रहे हैं कि शिक्षार्थी कितनी कामयाबी के साथ एक संदर्भ में सीखी हुई चीज को दूसरे संदर्भ में काम ले पाते हैं।

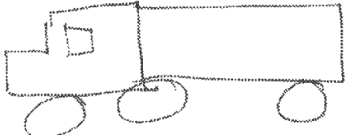
कर्मचारियों की संख्या (w)	घंटों की संख्या (H)
12	6
8	9
4	
6	


## अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- नीबू पानी तथा बर्फ के टुकड़ों के संदर्भ में एक इस तरह की समस्या बनाएं जिसमें आप दो अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों का इस्तेमाल करें, गिलास में भरा हुआ आयतन प्रतिशत में बताएं और उसमें प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष अनुपात को काम में लेने का मौका मिले।
- तीन ऐसे संदर्भ बताएं, जिनमें किए गए काम तथा उसके लिए जरूरी घंटों की संख्या के समान हालातों में उलट अनुपात शामिल हों।
- सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
  - इस अध्याय पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।
- शिक्षार्थी द्वारा नीचे दिए गए जवाब का विश्लेषण कीजिए। अपने सहकर्मियों के साथ इस बात पर चर्चा करिए कि इसे हल करते वक्त बच्चे के दिमाग में क्या चल रहा होगा।

किस वाहन की औसत गति (रफ्तार) ज्यादा है - एक ट्रक जो 1 1/2 घंटे में 126 मील जाता है या एक कार जो एक और तीन-चौथाई घंटे में 135 मील की दूरी तय करता है?

Eric

	→	miles	hours
		126	$\frac{3}{2}$
		42	$\frac{1}{2}$
		21	$\frac{1}{4}$

	→	miles	hours
		135	$\frac{13}{4} = \frac{7}{4}$
÷7		19 $\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$

ट्रक की गति (रफ्तार)  
ज्यादा है क्योंकि वह 15 मिनट  
में 21 मील जाता है जबकि  
कार उतने समय में  
20 मील से कम

## इकाई 4: अनुपात व समानुपात का इस्तेमाल करना

### इकाई का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

आनुपातिक तर्क, शिक्षार्थियों में परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़ी गुणात्मक अवधारणाओं पर बनी समझ का एक बेहतर संकेतक है। यह गणित के ज्यादा पेचीदी अवधारणाओं की बुनियाद रखता है। गुणात्मक चिंतन की प्रक्रियाएं ऐसे हालातों से संबंधित होती हैं जिनमें न्यायपूर्ण साझा करना, पैमानीकरण, सिकुड़ना, नकल करना तथा घात के तौर पर बढ़ाना होता है। इस आखिरी इकाई में, हम दूसरे गणितीय विचारों का परिचय करवाते हैं, जिनमें अनुपात-समानुपात के संदर्भों का इस्तेमाल किया गया है। इस अध्याय में, शिक्षार्थी सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता पर काम करते हैं और इसमें अनुपात तथा समानुपात के बारे में खुद की बनी समझ का इस्तेमाल करते हैं।

सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता के लिए दो उदाहरण काम में लिए गए हैं – रेल की समय सारणी तथा रेल का इंतजार करते वक़्त जामुनी द्वारा खेला जाने वाला एक खेल। रेल की समय सारणी वाली गतिविधि में शिक्षार्थी दिए गए समय में तय की गई दूरी का वक्र खींचने पर काम करेंगे। इसके बाद वे प्रति घंटा तय की दूरी का अनुपात निकालेंगे। बाल्टी-गेंद वाले खेल में, शिक्षार्थी बाल्टी से निकाली जाने वाली गेंद के लाल या पीली होने की संभाव्यता का पता लगाएंगे। दूसरे अध्याय में, शिक्षार्थी अनुपात के अंकगणित पर काम करेंगे। वे मिश्र अनुपात निकालेंगे, खाना बनाने के तरीकों वाली समस्या पर उसे लागू करेंगे तथा असली जिंदगी के संदर्भों में उसका अभ्यास करेंगे। मिश्र अनुपात में इस तर्क को समझने की जरूरत पड़ती है कि एक दूसरे के साथ प्रत्यक्ष अनुपाती दो मात्राओं को जब ऐसी किन्हीं दो मात्राओं से गुणा किया जाता है, जो कि खुद भी आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती हैं, तो गुणनफल में हासिल होने वाली मात्राएं भी आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती होती हैं।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- रेखीय समीकरण को ग्राफ पर दर्शाने में आनुपातिक तर्क की अपनी समझ का इस्तेमाल करना।
- संभाव्यता वाले हालातों में आनुपातिक तर्क की अपनी समझ को इस्तेमाल करना।
- गणित दूसरी अवधारणाओं के साथ अनुपात-समानुपात की अवधारणाओं का इस्तेमाल करना।

### पाठ का विवरण

क्र.	अध्याय का नाम	अध्याय का प्रकार	अध्याय का वर्णन
1	सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता में समानुपात	कार्य-पत्रक	इस आखिरी इकाई में, हम आपको उन गणितीय विचारों से परिचित करवाएंगे जिनमें अनुपात-समानुपात के संदर्भों का इस्तेमाल किया जाता है। इस अध्याय में शिक्षार्थी सरल रेखीय समीकरणों तथा संभाव्यता पर काम करेंगे, और उस दौरान अनुपात-समानुपात पर बनी खुद की समझ का इस्तेमाल करेंगे।
2	मिश्र अनुपात तथा समानुपात	कार्य-पत्रक	इस दूसरे अध्याय में, शिक्षार्थी अनुपातों के अंकगणित पर काम करेंगे। पहले वे मिश्र अनुपात निकालेंगे, फिर खाना बनाने के तरीकों की समस्या पर उसे लागू करेंगे और असली जिंदगी के संदर्भों में उसका अभ्यास करेंगे।

## अध्याय 1: सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता में अनुपातों का इस्तेमाल

### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता को समझाने के लिए दो उदाहरण काम में लिए गए हैं। पहला, रेल की समय सारणी तथा दूसरा रेल का इंतजार करते वक्त जामुनी द्वारा खेला जाने वाला खेल। समय सारणी वाली गतिविधि में शिक्षार्थी दिए गए समय के दौरान तय की गई दूरी का वक्र बनाएंगे। इसके बाद वे प्रति घंटा में तय की गई दूरी का अनुपात निकालेंगे। जामुनी के बाल्टी-गेंद वाले खेल में शिक्षार्थी बाल्टी से निकाली जाने वाली गेंद के लाल या पीली होने की संभावना की गणना

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग मुहैया करवाते हैं।

#### काम और गणितीय प्रासंगिकता

**गतिविधि-1:** यह गतिविधि में रेखीय समीकरण बनाने के लिए रेल की समय सारणी को काम में लिया गया है, इस संदर्भ से भी शिक्षार्थी बखूबी परिचित होते हैं। शिक्षार्थी रेखा खींच कर मात्रा में आए बदलाव समझते हैं।

#### शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां

इसमें शिक्षार्थियों के सामने नीचे दिए हालात रखे जाते हैं और उन्हें स्टेशन A से तय की गई दूरी को  $x$ -अक्ष पर तथा उस दूरी को तय करने में लिए गए समय को  $y$ -अक्ष पर लेकर एक वक्र बनाने के लिए कहा जाता है।

रेल क्रमांक 99991	स्टेशन का नाम	आने का समय	जाने का समय	स्टेशन A से दूरी(किमी)
	A		10:00	0
	B	14:30	15:00	225
	C	16:30	16:40	300
	D	18:40	19:00	400
	E	21:00		500

एक बार शिक्षार्थी अपने ग्राफ में इन बिंदुओं को लगा दें, उनसे कहें कि इन पर A, B, C, D, और E लिख दें। शिक्षार्थियों को यहां पर अलग-अलग चुनौतियों का सामना करना पड़ सकता है। सबसे पहले तो, इस सारणी में स्टेशन A से संचयी दूरी दी गई है। शिक्षार्थियों को सभी दो पास-पास के स्टेशनों के बीच की दूरी की गणना करनी पड़ेगी। एक बार यह कर लेने के बाद उन्हें ग्राफ बनाना पड़ेगा। समय का पता लगाना एक सीध-सादा काम है लेकिन इससे यह पता चल सकता है कि शिक्षार्थी समय को घटाने के बारे में क्या सोचते हैं। कृपया उनके विचारों पर ध्यान दें। एक बार जब ग्राफ बन जाए तो शिक्षार्थियों से कहें कि वे नीचे दी गई सारणी भरें।

स्टेशन	तय की गई दूरी (x)	लिया गया समय (y)	x/y
--------	-------------------	------------------	-----

A to B			
B to C			
C to D			
D to E			

अगर आपको यह सारणी फायदेमंद लगती है तो आप शिक्षार्थियों से इस सारणी को बनाने के बाद ग्राफ बनाने के लिए कह सकते हैं। कक्षा में चर्चा को आगे बढ़ाने के लिए कई सुरागों का इस्तेमाल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए हम यहां पर कुछ सवाल दे रहे हैं।

- ग्राफ का आकार कैसा है ?
- कौनसे दो शहर आपस में सबसे ज्यादा दूर हैं ?
- अपनी बनाई सारणी में क्या आपको कोई पैटर्न नजर आया ?
- स्तम्भ x/y में दर्शाई गई मात्राओं को आप क्या कहेंगे ?

**गतिविधि-2:** इस गतिविधि में, शिक्षार्थी संभाव्यता के विचार पर काम करेंगे तथा अनुपात की संकेत-पद्धति का इस्तेमाल करेंगे। जामुनी द्वारा बाल्टी में रखी लाल व काली गेंदों के साथ खेले गए खेल को, संभाव्यता के विचारों से बच्चों को परिचित करवाने के लिए, हकीकत में अपनी कक्षा में खेल सकते हैं।

शिक्षार्थियों को नीचे दिए गए हालात समझाने हैं।

रेलवे स्टेशन पर, एक स्टॉल पर जामुनी को तीन बाल्टियां मिली । बाल्टी A में 2 लाल गेंदे और 4 पीली गेंदे थी। बाल्टी B में 4 लाल गेंदे और 4 पीली गेंदे थी। बाल्टी C में 7 लाल गेंदे और 14 पीली गेंदे थी। जमुनी और उसके दोस्तों ने नीचे दिए गए रोचक सवाल पूछे।

अमन ने जामुनी से पूछा : 'अगर तुम हर एक बाल्टी में से एक गेंद निकालो तो इस बात की क्या संभावना है कि वह गेंद लाल होगी ?

इस वक्त, इस समस्या का सामना दो तरीकों से किया जा सकता है। शिक्षक असल में ऐसी बाल्टी बना या ला सकता है और शिक्षार्थियों से कह सकता है कि वे करके देखें कि क्या होता है। बेशक, कम संख्या में किए गए प्रयत्नों से संभाव्यता गणितीय तौर पर गणना करके निकाली गई संख्या के बराबर नहीं होगी। अध्यापक इस मौके का इस्तेमाल इस चीज पर बातचीत करने के लिए कर सकते हैं कि हकीकत में संभाव्यता क्या होती है। यह देखने के लिए कितने प्रयत्न करने की जरूरत पड़ेगी कि बाल्टी A में से लाल गेंद को निकालने की संभाव्यता असल में  $\frac{1}{2}$  है।

	लाल गेंदे	पीली गेंदे	लाल गेंद को निकालने की संभाव्यता
बाल्टी A	2	4	
बाल्टी B	4	8	
बाल्टी C	7	14	

जब शिक्षार्थी इस सारणी को भर दें तब उनके नीचे दिए गए सवाल पूछें।

- क्या आपको सारणी के आखिरी स्तम्भ में कोई पैटर्न नजर आता है ?
- क्या आप समझ सकते हैं कि आपको यह पैटर्न नजर क्यों आया ?
- सारणी के आखिरी स्तम्भ में दी गई राशियां पूरी सारणी में समान रहती हैं, जबकि हरेक बाल्टी में गेंदों का संख्या अलग-अलग है ?

### अध्यापक का पुनर्चितन तथा अवलोकन

- सरल रेखीय समीकरण तथा संभाव्यता की अवधारणा को अपने शब्दों में समझाइए। इन अवधारणाओं में किस जगह पर अनुपात तथा समानुपात के विचारों को इस्तेमाल किया जा सकता है ?
- क्या अनुपात तथा समानुपात को दर्शाने के लिए दूसरे किन्हीं गणितीय विचारों का इस्तेमाल किया जा सकता है ? उन विचारों को विस्तार से समझाएं।
- सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चितन करिए।
  - इस अध्याय पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

## इकाई 4 : अनुपात तथा समानुपात को इस्तेमाल करना अध्याय 2: मिश्र अनुपात तथा समानुपात

### अध्याय का विहंगमावलोकन (ओवरव्यू)

जामुनी द्वारा खेले गए बाल्टी-गेंद वाले खेल में, शिक्षार्थी बाल्टी में से निकाली गई एक लाल या एक पीली गेंद की संभाव्यता लिखेंगे। दूसरे अध्याय में, शिक्षार्थी अनुपात के अंकगणित पर काम करते हैं। वे मिश्र अनुपात पाते हैं, अनुपातों को खाना बनाने के तरीकों पर लागू करते हैं और असली जिंदगी के संदर्भ वाली समस्याओं पर काम करते हैं। मिश्र अनुपात के लिए इस बात की तार्किक समझ जरूरी होती है कि ऐसी दो मात्राएं आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती होती हैं, जब उन्हें दूसरी दो मात्राओं से गुणा किया जाता है जो कि पहले ही एक दूसरे के साथ प्रत्यक्ष अनुपाती होती हैं, उसके बाद भी वे आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती ही रहती हैं।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- आनुपातिक तर्क की अपनी समझ को संभाव्यता वाले हालातों में इस्तेमाल कर पाना।
- मिश्र अनुपात तथा समानुपात को समझाना तथा इस्तेमाल करना।
- अनुपात-समानुपात की अवधारणाओं को गणित के दूसरे विचारों से जोड़ पाना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम अध्याय से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही अध्याय के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग मुहैया करवाते हैं।

काम और गणितीय प्रासंगिकता	शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां
<p><b>गतिविधि-1:</b> आखिरी इकाई के इस आखिरी अध्याय में, शिक्षार्थी असली जिंदगी की ऐसी समस्याओं पर काम करेंगे जिनमें अनुपात-समानुपात तथा मिश्र अनुपात शामिल होते हैं। उनमें किए गए काम तथा उसमें लगाए गए समय के संदर्भ का इस्तेमाल किया गया है।</p>	<p>शिक्षार्थी ऐसे हालातों पर काम करेंगे जिनमें किया गया काम भी बदलता है और उसमें लगाया गया समय भी बदलता है।</p> <p>जामुनी और उसके दोस्त मेले से लौट कर घर आ गए। जब जामुनी अपने अभिभावकों के काम की जगह पर जाती है तो वह देखती है कि मजदूरों की एक टोली 400 मीटर लंबी दीवार 12 दिन में बनाती है और उसे बनाने के लिए हर रोज 8 घंटे काम करती है। अगर वही मजदूर रोज 9 घंटे काम करते हैं तो 600 मीटर लंबी एक दीवार बनाने में उन्हें कितना वक्त लगेगा ?</p> <p>यहां पर छात्रों से उम्मीद है कि वे किए गए काम और उसमें लगाए गए समय के बीच के अनुपात को समझें और उस अनुपात का इस्तेमाल काम में लगाने वाले दिनों की संख्या का पता लगाने के लिए करें जो कि 600 मीटर लंबी दीवार बनाने में लगेगा।</p> <p>अनुपात पर काम जारी रखते हुए शिक्षार्थी नीचे दिए हुए काम करें।</p>

जामुनी की मां बैंक में 4500 रुपए जमा करवाती है और उसे 2 साल बाद उस रकम पर 307 रुपए ब्याज के मिलते हैं। अगर वह 6000 जमा करवाती तो 5 साल के बाद उसको कितना ब्याज मिलता ?

इस में शिक्षार्थियों को पहले ब्याज की दर का पता लगाना है जो कि जमा कराई गई रकम तथा बरसों की संख्या के बीच में पाए जाने वाले अनुपात से निकाली जाएगी और उसके बाद उस अनुपात का इस्तेमाल 6000 रुपए पर ब्याज का पता लगाने में करना है।

अध्यापक यहां पर इस बात पर चर्चा कर सकता है कि किस तरह से ब्याज की दर भी एक अनुपात है और इस रूप में शिक्षार्थी कौन से दूसरे अनुपातों को देख सकते हैं

गतिविधि-2: यह गतिविधि एक दूसरे परिचित हालात का इस्तेमाल करती है और शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देती है कि वे अनुपात तथा समानुपात संबंधी अपने ज्ञान का अभ्यास कर पाएं।

एक दिन शाम के वक्त, जामुनी, अमन, लीना और साहिर एक चाय की दुकान पर बैठे हैं। दुकानदार द्वारा चाय बनाने में इस्तेमाल किया गया नुस्खा नीचे दिया गया है।

- चाय पत्ती - 2 चम्मच
- शक्कर - 4 चम्मच
- दूध - 12 चम्मच
- पानी - 20 चम्मच

आधे घंटे बाद जामुनी के अभिभावक भी उनके साथ आकर बैठ जाते हैं और सभी मिलकर तय करते हैं कि वे एक एक कप चाय का पीएंगे। आपको यह पता लगाना है कि 6 लोगों के लिए चाय बनाने के लिए हर एक चीज की कितनी मात्रा की जरूरत पड़ेगी अगर चाय का स्वाद वैसा रहे, जैसा कि पहले बनाई गई चाय का था।

- चाय पत्ती - \_\_\_\_\_ चम्मच
- शक्कर - \_\_\_\_\_ चम्मच
- दूध - \_\_\_\_\_ चम्मच
- पानी - \_\_\_\_\_ चम्मच

शिक्षार्थियों के सामने प्रस्तुत किए गए हालातों में चाय बनाने का तरीका शामिल है और उसे पैमाने की मदद से बढ़ा 6 व्यक्तियों के लिए इस्तेमाल करना है। यह एक परिचित गतिविधि है और शिक्षार्थी अपने जवाबों तक कैसे पहुंचे, इसे ठीक से जानने के लिए अध्यापकों को उनसे सवाल जरूर पूछने चाहिए।

छह व्यक्तियों के लिए चाय बनाने के लिए जितने सामान की जरूरत पड़ेगी उसे नीचे दी गई सूची में भरिए। चाय का स्वाद एकदम वैसा ही होना चाहिए जैसा पहले बनाई चाय का था।

- चाय पत्ती - \_\_\_\_\_ चम्मच
- शक्कर - \_\_\_\_\_ चम्मच
- दूध - \_\_\_\_\_ चम्मच
- पानी - \_\_\_\_\_ चम्मच

इन सवालों का जवाब पाने के लिए शिक्षार्थियों को आंतरिक तथा बाहरी अनुपातों को काम में लेना चाहिए।



### अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन

- आप क्या सोचते हैं कि आपके शिक्षार्थियों ने इस माॅड्यूल पर काम करने के दौरान क्या सीखा होगा।
- रोजमर्रा की जिंदगी के संदर्भों में प्रतिशत का इस्तेमाल करते हुए अनुपात-समानुपात की एक समस्या बनाइए। अनुपात के विचारों को इस समस्या में कैसे काम लिया गया है, इसे समझाइए।
- ज्यामिति का एक सवाल बनाइए जिसमें अनुपात तथा समानुपात की समझ का इस्तेमाल किया गया हो। इस समस्या को बनाते वक्त अपने सोचने की प्रक्रिया के बारे में लिखिए।
- अपने सहकर्मियों से कहिए कि वे आपके बनाए सवालों को हल करें।

# NOTES

# NOTES





CONNECTED LEARNING INITIATIVE

सॅटर फॉर एजुकेशन, इनोवेशन एंड एक्शन रिसर्च,  
टाटा सामाजिक विज्ञान संस्थान,  
वी. एन. पूरव मार्ग, देवनार,  
मुंबई - 400088, भारत  
फोन : +91 022 25525003  
[clix.tiss.edu](http://clix.tiss.edu)