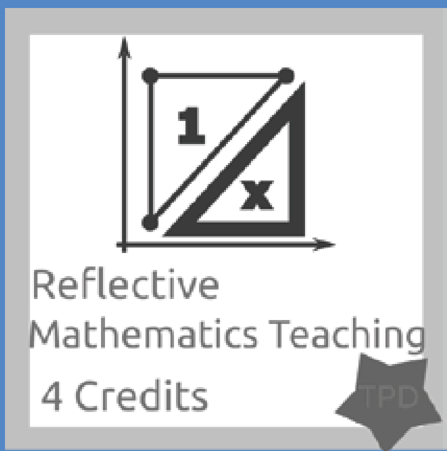
# स्नातकोत्तर प्रमाणपत्र
# आई.सी.टी. युक्त विमर्शपूर्ण शिक्षण

## S02 चिंतनशील गणित शिक्षण

## शिक्षक पाठ्यक्रम पुस्तिका




CONNECTED LEARNING INITIATIVE

TISS/CEIAR/CLIx/TCb/M/h/27July’18/02

The **Connected Learning Initiative (CLIx)** is a technology enabled initiative at scale for high school students. The initiative was seeded by Tata Trusts, Mumbai and is led by Tata Institute of Social Sciences, Mumbai and Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA USA. CLIx offers a scalable and sustainable model of open education, to meet the educational needs of students and teachers. The initiative has won UNESCO’s prestigious 2017 King Hamad Bin Isa Al-Khalifa Prize, for the Use of Information and Communication Technology (ICT) in the field of Education.

CLIx incorporates thoughtful pedagogical design and leverages contemporary technology and online capabilities. Resources for students are in the areas of Mathematics, Sciences, Communicative English and Digital Literacy, designed to be interactive, foster collaboration and integrate values and 21st century skills. These are being offered to students of government secondary schools in Chhattisgarh, Mizoram, Rajasthan and Telangana in their regional languages and also released as Open Educational Resources (OERs).

Teacher Professional Development is available through professional communities of practice and the blended Post Graduate Certificate in Reflective Teaching with ICT. Through research and collaborations, CLIx seeks to nurture a vibrant ecosystem of partnerships and innovation to improve schooling for underserved communities.

Collaborators:
Centre for Education Research & Practice – Jaipur, Department of Education, Mizoram University – Aizawl, Eklavya – Bhopal, Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR – Mumbai, National Institute of Advanced Studies – Bengaluru, State Council of Educational Research and Training (SCERT) of Telangana – Hyderabad, Tata Class Edge – Mumbai, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics – Pune, Govt. of Chhattisgarh, Govt. of Mizoram, Govt. of Rajasthan and Govt. of Telangana.

© TISS, 2018

Except where otherwise noted, this content is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International license

Any questions, suggestions or queries may be sent to us at:
contact@clix.tiss.edu

Centre for Education, Innovation and Action Research
Tata Institute of Social Sciences
V.N.Purav Marg, Deonar,
Mumbai – 400088, India
Phone: +91 – 22- 25525002/3/4
www.clix.tiss.edu

# स्नातकोत्तर प्रमाणपत्र
# आईसीटी युक्त विमर्शपूर्ण शिक्षण

# S02 चिंतनशील गणित शिक्षण

# शिक्षक पाठ्यक्रम पुस्तिका

यह पुस्तिका संबंधित है:

नाम:.........................................................................................................

कक्षा :.......................................................................................................

अनुभाग :....................................................................................................

# सूची

**Attributions**
**CLIx गणित ज्यामितीय तर्क-क्षमता**

**ज्यामितीय तर्क भाग I**


**इकाई 1: आकृति की अवधारणा ........ 1**
पाठ 1.1: आकृति क्या होती है? ........ 1

**इकाई 2: आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन ........ 4**
पाठ 2.1: आकृतियों का विश्लेषण ........ 5
पाठ 2.2: आकृतियों का वर्णन ........ 7

**इकाई 3: आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करना ........ 9**
पाठ 3.1: आकृतियों का वर्गीकरण ........ 10
पाठ 3.2: आकृतियों को परिभाषित करना ........ 12
पाठ 3.3: विशिष्ट चतुर्भुजों को परिभाषित करना ........ 14
पाठ 3.4: विशिष्ट चतुर्भुजों की पिरभाषा ........ 16


**ज्यामितीय तर्क भाग II**


**इकाई 1: गुण-आधारित तर्क-क्षमता ........ 18**
पाठ 1.1: विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच सम्बन्ध ........ 19
पाठ 1.2: सम्बन्धों का निरूपण ........ 22
पाठ 1.3: परिभाषाओं पर चर्चा ........ 25

**इकाई 2: प्रमाणों की जरूरत को समझना ........ 27**
पाठ 2.1: मध्यबिन्दु - पड़ताल ........ 29
पाठ 2.2: कोणों के योग का गुणधर्म ........ 31
पाठ 2.3: प्रमाण की आवश्यकता ........ 33
पाठ 2.4: प्रमाण का लेखन ........ 35
पाठ 2.5: सही और गलत सिद्ध करना ........ 36

**CLIx subject team**
Amit Dhakulkar
Arati Bapat
Arindam Bose
Bindu Thirumalai
Jayashree Subramanian
Jeenath Rahaman
Ruchi S. Kumar
Saurabh Khanna
Saurabh Thakur
Sayali Chougale
Suchismita Srinivas
Sumegh Paltiwale
Vijay Wani
Shweta Naik (Consultant)

**Academic mentor**
Aaloka Kanhare
K. Subramaniam

**Academic support**
Archana Correa
Arnab Kumar Ray
Jaya Mahale
Jayashree Anand
Samir Dhurde
Shikha Takker
Tuba Khan

**Editors**
Arindam Bose
Bindu Thirumalai
Ruchi S. Kumar
Suchismita Srinivas

**Copy editors**
Aparna Tulpule
Venkatnarayanan Ganapathi

**Translators**
Amrit Upadhyay
Dilip Tanwar
Dr. K. Sharma
Dr. Srinivas Chennuri
Hari Mishra
Jitender Kumar
Pramod Pathak
Praveen Allamsetti
Ravi Kant

**Production team**
Dhammaratna Jawale
Jaya Mahale
Jayashree Anand
Sheetal Suresh

**Video development support**
Gitanjali Somanathan
Manoj Bhandare
Shiva Thorat

**Voice over**
Arindam Bose
Ruchi S. Kumar
Saurabh Thakur
Suchismita Srinivas

**Platform development**
Brandon Muramatsu
Cole Shaw
Harshit Agarwal
Jeff Merriman
Kathleen McMahon
Kedar Aitawdekar
Keerthi K.R.D
Kirky DeLong
Mrunal Nachankar
Nagarjuna G.
Padmini Sampath
Prachi Bhatia
Rachana Katkam
Ramjee Swaminathan
Sadaqat Mulla
Satej Shende
Sumegh Paltiwale
Saurabh Bharswadkar

**Tool development**
Ashwin Nagappa
Kedar Aitawdekar
Mrunal Nachankar
Prachi Bhatia
Rachana Katkam
Sadaqat Mulla
Saurabh Bharswadkar
Tanvi Domadia
Tejas Shah

**Platform design**
Aditya Dipankar

**Platform content authoring**
Ashirwad Wakade
Rajiv Sambari
Roshan Gajbhiye
Saurabh Thakur
Sumegh Paltiwale
Vijay Wani

**Publication team**
Rachna Ramesh Kumar
Sunita Badrinarayan
Usha Iyengar

**Cover design and formatting**
Ramesh Khade

**Special Thanks**
To the students and teachers of all the schools where we piloted our modules.
To all the teachers, copyeditors and Rajasthan and Telangana team for their time and effort in the revalidation of content

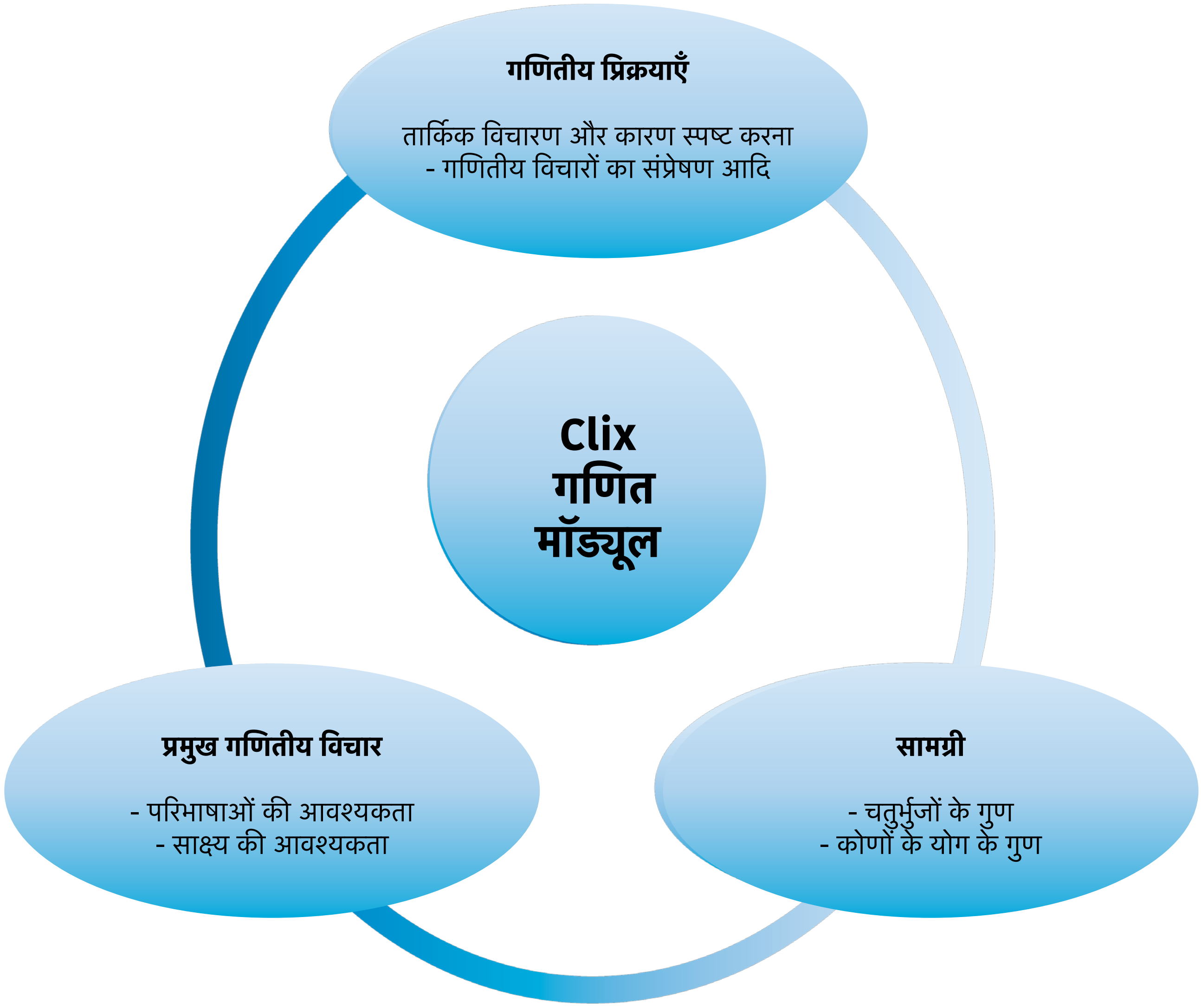
# CLIx गणित
# ज्यामितीय तर्क-क्षमता मॉड्यूल

"ऐसे शिक्षण समुदायों का निर्माण करना, जहाँ सभी छात्र और शिक्षक साथ मिलकर गणित विषय से रू-ब-रू होते हैं और गणित की एक संकाय के रूप में साझा समझ विकसित करते हुए आगे बढ़ते हैं।"

## उद्देश्य

Clix गणित के मॉड्यूल्स का लक्ष्य तीन अलग-अलग लेकिन परस्पर संबंधित पहलुओं की जानकारी देना है।

- सामग्री: वे ज्यामितीय अवधारणाएँ और विचार, जिन्हें छात्रों को पढ़ना है।
- प्रमुख गणितीय विचार: उदाहरण के लिए - गणित में परिभाषाओं की प्रकृति और उद्देश्य क्या होता है, प्रमाण क्या होते हैं, उनकी आवश्यकता क्यों पड़ती है और किसी चीज़ को 'सिद्ध' या 'गलत सिद्ध' करने का क्या अर्थ होता है आदि।
- गणितीय प्रिक्रयाएँ: छात्रों से अपेक्षा की जाती है कि वे – तर्क-क्षमता, अनुमान लगाने और उसका परीक्षण करने, गणितीय विचारों पर चर्चा और बहस करने और उनके अपने गणितीय विचार तैयार करके उन्हें दूसरों के सामने सिद्ध करने या गलत सिद्ध करने जैसे कार्यकलापों में सक्रियता से हिस्सा लेंगे।



| | **युनिट का नाम** | **वर्णन** | **डिजिटल संसाधन** |
|---|---|---|---|
| ज्यामितीय तर्क भाग I | | | |
| युनिट 1 | आकृति की अवधारणा | इस युनिट में कुछ ऐसी बुनियादी अवधारणाओं पर चर्चा की गई है, जो ज्यामिति की समझ विकसित करने की दृष्टि से अनिवार्य होती हैं। इस युनिट में मुख्य रूप से द्वि-आयामी आकृतियों की गहन जानकारी दी जाएगी – जो युक्लिडीय ज्यामिति के अध्ययन के प्रमुख अंग हैं और साथ ही हाई स्कूल में पढ़ाए जाने वाले ज्यामितीय पाठ्यक्रम का भी बड़ा हिस्सा हैं। | टर्टल लोगो गतिविधि |
| युनिट 2 | आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन करना | ज्यामितीय सोच के वान हिले स्तरों पर आधारित यह युनिट तर्क-क्षमता को अगले स्तर पर ले जाती है। इस युनिट में दिए गए पाठों का ताना-बाना एक डिजिटल खेल के इर्दिगर्द बुना गया है, जो छात्रों को आकृतियों को सिर्फ़ वस्तु या प्रतीक के रूप में नहीं, बल्कि उनकी विशेषताओं और गुणों का विश्लेषण और उनके बारे में बात करने के लिए प्रोत्साहित करता है। | मिशन 1 और 2 - पुलिस क्वॉड खेल |
| युनिट 3 | आकृतियों को वर्गीकृत और परिभाषित करना | इस युनिट के पाठ अलग-अलग आकृतियों के गुणों पर नज़र डालने के अलावा, छात्रों को एक कदम और आगे ले जा कर आकृतियों की श्रेणियों की जानकारी देंगे और साथ ही एक साथ सहयोग करके उनकी साझा पिरभाषाएँ विकसित करने में भी सक्षम बनाएंगे। | मिशन 3 – पुलिस क्वॉड खेल |
| ज्यामितीय तर्क भाग II | | | |
| युनिट 1 | गुण-आधारित तर्क-क्षमता | यह एक महत्वपूर्ण चरण हैं, जहाँ छात्र संबंधात्मक और निष्कर्षात्मक 'यिद-तो' तर्क-क्षमता की दुनिया में कदम रखेंगे। यहाँ वैकल्पिक परिभाषाओं और परिभाषाओं की आवश्यकता पर भी चर्चा की गई है। खेल का विस्तार इस युनिट तक है। | मिशन 4 – पुलिस क्वॉड खेल |
| युनिट 2 | साक्ष्य की आवश्यकता को समझना | अंतिम युनिट में अनुमान लगाने, परीक्षण करने और अनौपचारिक तर्क-क्षमता गतिविधियों को शामिल किया गया है। छात्रों को तथ्यात्मक तर्क-क्षमता के आधार पर एक परिकल्पना तैयार करके उसकी पुष्टि करनी होगी और साथ ही यह भी समझना होगा कि इन पुष्टियों को 'साक्ष्य' क्यों नहीं माना जा सकता। उन्हें इसकी जानकारी मिलती है कि तथ्यात्मक तर्क-क्षमता गणित को समझने का एक महत्वपूर्ण तरीका है, इसमें त्रुटि हो सकती है और इसीलिए तर्कसंगत साक्ष्यों की ज़रूरत होती है। | जियोजेब्रा गतिविधि |

# ज्यामितीय तर्क
भाग I

# इकाई 1– आकृति की अवधारणा

## अवलोकन

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र आकृति को परिवर्तन और परिवर्तन नहीं (उदाहरण के लिए, अभिविन्यास में परिवर्तन) वाले कारकों का अन्वेषण करके ‘आकृति’ की सशक्त समझ विकसित कर सकेंगे और साथ ही इसका कारण समझ सकेंगे। इस इकाई की मदद से छात्र इस अवधारणा को आत्मसात कर सकेंगे कि गणित में ‘आकृति’ गुणों के एक निश्चित समूह द्वारा परिभाषित की जाती है, न कि उसके रूप को देखकर।

इसके लिए, छात्रों को दो गतिविधियाँ पूरी करनी होगी और उसके बाद पूरी कक्षा में इस पर परिचर्चा की जाएगी। पहली गतिविधि में, वे माचिस की तीलियों के साथ आकृतियाँ बनाएँगे और आकृतियों पर विभिन्न क्रियाओं के प्रभाव की पड़ताल करेंगे। दूसरी गतिविधि में, वे कंप्यूटर लैब में जा कर लोगो टर्टल प्रोग्रामिंग का इस्तेमाल करके वर्ग बनाएँगे और वर्ग की एक कार्यशील परिभाषा विकसित करेंगे। इसके बाद पूरी कक्षा में होने वाली परिचर्चा में, छात्रों को शिक्षक द्वारा आयोजित परिचर्चा में हिस्सा ले कर अपने ज्ञान को पुख़्ता करना होगा।

## अध्ययन का उद्देश्य

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र

- ‘आकृति’ की समझ विकसित कर सकेंगे और विभिन्न क्रियाओं, जैसे कि गति, घूर्णन, परावर्तन और विकृतिकरण का आकृति पर पड़ने वाले प्रभाव को समझ सकेंगे
- वर्ग और त्रिभुज की पहचान कर सकेंगे और उदाहरणों और ग़ैर-उदाहरणों की पहचान स्पष्ट कर सकेंगे।
- ‘वर्ग’ और ’त्रिभुज’ की कार्यशील परिभाषाएँ विकसित कर सकेंगे

## पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान 2

- आकृति की बुनियादी समझ
- वर्गों और त्रिभुजों की बुनियादी (दृष्टिगत) पहचान

## पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

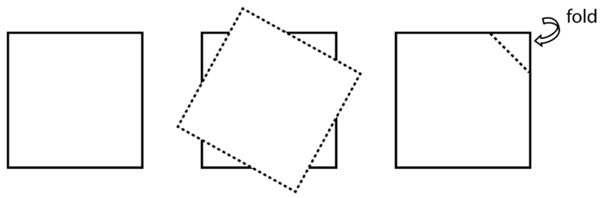
- लोगो टर्टल प्रोग्रामिंग की बुनियादी क्रियाओं की जानकारी (केवल सरल कमांड – आगे, दाएँ, बाएँ और क्लीयर स्क्रीन की जानकारी होनी चाहिए।

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

| पाठ | गतिविधि | गतिविधि का नाम | अवधि (अनुशंसित) | माध्यम |
|---|---|---|---|---|
| पाठ 1.1: आकृति क्या होती है | 1 | माचिस की तीलियों से बनी आकृतियों का अन्वेषण | 35 | स्वयं करें (स्व-अध्ययन) |
| | 2 | वर्ग बनाना | 35 | डिजिटल |
| | 3 | कक्षा परिचर्चा | 20 | कक्षा परिचर्चा |
| मूल्यांकन 1 | 1.4 | मूल्यांकन : इकाई 1 | 35 | वर्कशीट |

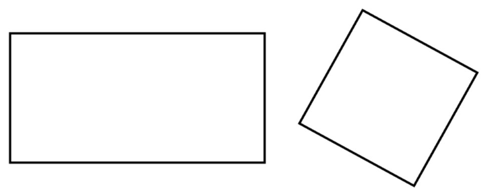
## कक्षा परिचर्चाएँ आयोजित करने के उपाय

कक्षा परिचर्चा में, आप गतिविधि 1.1 और 1.2 से मिली सीखों को समेकित करेंगे, ताकि छात्र आकृति की अवधारणा को समझने के साथ-साथ उन क्रियाओं को भी समझ सकें, जो किसी आकृति का रूप कायम रखते हैं या उसे बदलते हैं। परिचर्चाओं के माध्यम से, छात्र वर्ग की एक कार्यशील परिभाषा तैयार करेंगे। आपके द्वारा कक्षा कक्ष में आयोजित की जा सकने वाली कुछ गतिविधियों का उल्लेख नीचे किया गया है।




एक वर्गाकार कागज़ का उपयोग करके उसे रूपांतरित या विकृत करने का प्रयास करें और इस पर चर्चा करें कि इनमें से प्रत्येक मामले में आकृति का रूप बदल जाता है या फिर एक वर्ग बना रहता है।

बोर्ड पर एक आयत और एक घूमा हुआ वर्ग बनाकर छात्रों से पूछें कि क्या इन आकृतियों को वर्ग कहा जा सकता है।



छात्रों से उनके उत्तर का स्पष्टीकरण देने या कारण बताने को कहें।

उनसे पूछें कि किस प्रकार के रूपांतरण आकृति के गुणों को बदलते हैं (जैसे खींचना, विकृत करना आदि) और कौन-से रूपांतरण उसके गुणों को नहीं बदलते (जैसे घूर्णन, परावर्तन, गति)। उन्हें आकृति के इन रूपांतरणों को समझकर ख़ुद को यह विश्वास दिलाने का मौक़ा दें कि उनमें से कौन-से रूपांतरण गुणों को कायम रखते हैं और कौन-से नहीं। उनकी यह समझने में सहायता करें कि आकृतियाँ उनके गुणों द्वारा परिभाषित होती हैं और जब तक कि उनके गुणों में कोई परिवर्तन नहीं होता, तब तक आकृति में भी कोई परिवर्तन नहीं होता।

छात्रों से गुणों के आधार पर अपने शब्दों में वर्ग का वर्णन करने के लिए कहें और एक परिभाषा विकसित करने में उनकी सहायता करेंगे। यही अभ्यास त्रिभुजों के लिए भी किया जा सकता है।

## स्मरणीय तथ्य

लोगो टर्टल गतिविधि का उपयोग बाहर भी किया जा सकता है, जहाँ कुछ छात्र आदेश देंगे और अन्य छात्र आदेशों का पालन करेंगे (ठीक कंप्यूटर पर टर्टल की तरह) और अपनी राह बनाएँगे।

हो सकता है कुछ छात्र अभी भी आकृतियों को उनके रंगरूप के आधार पर वर्णन कर रहे हों। ऐसे मामलों में इस बात कर ज़ोर दें कि आकृति का रूपांतरण होने पर गुणों का क्या होता है। छात्रों के मन में यह भ्रांति हो सकती है कि जब वर्ग को घुमाया जाता है, तो वह वर्ग नहीं रह जाता। छात्रों की यह समझने में मदद करें कि आकृति अपने रंगरूप से नहीं, बल्कि गुणों से परिभाषित होती है। इस तथ्य को साबित करने के लिए आप वास्तविक जीवन के कुछ उदाहरण दे सकते हैं।

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| क्या छात्रों ने परिचर्चा में हिस्सा लिया? कुछ उदाहरण दें | |
| क्या कुछ ऐसे छात्र भी हैं, जिन्हें आकृति की अवधारणा समझ में नहीं आई है? आपको ऐसा क्यों लगता है? | |
| क्या आप छात्रों द्वारा की गई कुछ ज्यामितीय त्रुटियों की पहचान कर सके? क्या आप छात्रों को उनका समाधान सुझा सके और कैसे? कम-से-कम एक का वर्णन करें। | |
| परिचर्चा के दौरान वर्ग की क्या कार्यशील परिभाषाएँ विकसित की गईं? कम-से-कम 3 को नोट करें। | |
| **मनन** | |
| क्या छात्र समझ सके कि किस चीज़ पर चर्चा की जा रही है? आप दावे के साथ ऐसा कैसे कह सकते हैं? | |
| कौन-सी समस्याएँ आईं? आपने उन्हें सुलझाने के लिए क्या किया? | |
| क्या परिचर्चा में सभी छात्रों ने हिस्सा लिया? परिचर्चाओं में सभी छात्रों को शामिल करने के लिए आपने क्या किया? | |
| क्या आप कक्षा में पढ़ाने के दौरान हुईं कुछ रोचक बातें बताना चाहेंगे? | |

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# इकाई 2: आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन

## अवलोकन

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र दृष्टिगत स्वरूप के बजाय गुणों के आधार पर आकृतियों का विश्लेषण और वर्णन कर सकेंगे। वे आकृतियों के बारे में बातें करते समय उचित गणितीय शब्दों और शब्दावली को समझकर उनका उपयोग करने लगेंगे। यह इकाई छात्रों में निगमनात्मक तर्क शक्ति की आरंभिक अवधारणा विकसित करने में भी सहायता करेगी।

इस इकाई के अधिकांश पाठ एक खेल परिवेश पर आधारित हैं। इस इकाई की शुरुआत, एक संक्षिप्त स्वयं करें गतिविधि और कुछ उपयोगी शब्दों और गुणों के सारांश से होती है। इसके बाद, छात्र 3-4 सत्रों तक पुलिस क्वॉड खेल के पहले दो मिशन खेलेंगे और उन सत्रों के बीच-बीच में पूरी कक्षा के लिए परिचर्चाये आयोजित की जाएँगी। पहले मिशन से छात्रों को आकृतियों के महत्वपूर्ण गुणों का विश्लेषण करने और उन्हें समझने में मदद मिलेगी, जबकि दूसरे मिशन से उन्हें यह पता चलेगा कि वे इन गुणों का खेल की रणनीति बनाने में कैसे इस्तेमाल कर सकते हैं।

## अध्ययन के उद्देश्य

यह इकाई पूरी करने के बाद, छात्र

- आकृतियों पर विश्लेषणात्मक ढंग से दृष्टि डाल सकेंगे, यानी वे उन्हें 'दिखावट' के आधार पर नहीं, बल्कि उनका निर्माण करने वाले हिस्सों और गुणों के आधार पर देखेंगे – और इसी क्रम में, द्विआयामी आकृतियों के बारे में विचार करने के निचले (यानी कम जिटल) स्तर से ऊँचे (यानी अिधक जिटल) स्तर पर जाएँगे।
- आकृतियों की विशेषताओं और गुणों से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण शब्दों और अवधारणाओं को समझेंगे (भुजाओं और कोणों का अर्थ, अलग-अलग प्रकार के कोण, समानांतर रेखाओं की अवधारणा आदि ) और उनका ज़रूरत के अनुसार उचित और सटीक ढंग से इस्तेमाल करेंगे।
- निगमनात्मक तर्क शक्ति का आरंभिक ज्ञान अर्जित करेंगे – जिसमें तथ्यों के आधार पर किसी निश्चित नतीजे पर पहुँचने का विचार भी शामिल होगा।

## पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान1

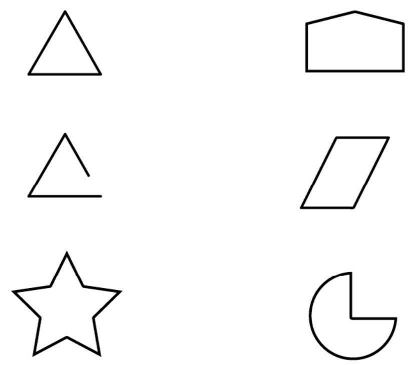
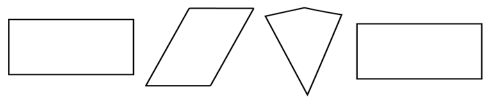
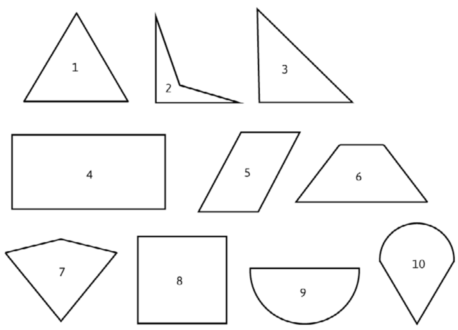
- आकृति की अवधारणा तथा इस विचार की समझ कि किसी आकृति के गुण होते हैं।
- द्विआयामी आकृतियों के कुछ बुनियादी गुणों की समझ। उदाहरण के लिए:
  - सीधी और वक्र रेखा/भुजा के बीच अंतर करने का ज्ञान
  - किसी आकृति की भुजाओं और शीर्षों की संख्या ज्ञात करने और उन्हें पहचानने का ज्ञान
  - 'कोण' के अर्थ का ज्ञान
  - सम, न्यून, अिधक और बृहत् कोणों की समझ और उन्हें पहचानने का ज्ञान
  - समानांतर रेखाओं की अवधारणा की समझ और किसी आकृति की समानांतर भुजाओं के युग्मों की पहचान करने का ज्ञान

## पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

- ड्रैग, ड्रॉप और इंटरफ़ेस का इस्तेमाल करने से जुड़ी कार्यविधियों की जानकारी

| पाठ | गतिविधि | गतिविधि का नाम | अनुशंसित अविध (मिनट) | माध्यम |
|---|---|---|---|---|
| पाठ 2.1: आकृतियों का विश्लेषण | 1 | आकृतियों की छँटाई | 35 | स्वयं करें |
| | 2 | पुलिस क्वॉड – मिशन 1 | 70 | डिजिटल |
| | 3 | कक्षा पिरचर्चा | 40 | कक्षा पिरचर्चा |
| पाठ 2.2: आकृतियों का वर्णन | 1 | पुलिस क्वॉड – मिशन 2 | 70 | डिजिटल |
| | 2 | कक्षा पिरचर्चा | 20 | कक्षा पिरचर्चा |
| मूल्यांकन 2 | 2.6 | मूल्यांकन: इकाई 2 | 35 | वर्कशीट |

## अध्याय 2.1 : आकृतियों का विश्लेषण

| कक्षा परिचर्चाये आयोजित करने के उपाय | |
|---|---|
| कक्षा पिरचर्चा में, आप<br>• छात्रों को खेल से मिली सीखों का सार बताएँगे<br>• खेल के अगले सत्र के लिए अधिक प्रभावशाली रणनीतियाँ विकिसत करने में उनकी सहायता करेंगे<br><br>छात्रों के मन में बैठी वैकल्पिक अवधारणाओं को समझा और उनका समाधान किया जा सकता है।<br>• पिरचर्चा से पहले छात्रों द्वारा किए गए कार्यों को देखकर आप छात्रों की विचारधारा को समझ सकते हैं और पिरचर्चा को आगे बढ़ाने के संबंध में मार्गदर्शन प्राप्त कर सकते हैं।<br><br>आकृतियों का उनके गुणों के आधार पर वर्णन करने में छात्रों की मदद के लिए नीचे कुछ कार्यों का सुझाव दिया गया है। आप छात्रों को ये कार्य समूहों में पूरा करने और सामूहिक चर्चाओं में हिस्सा लेने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं। | आप बोर्ड पर नीचे दी गई आकृतियाँ बनाकर उन्हें इन आकृतियों का वर्णन करने के लिए कह सकते हैं।<br> |
| छात्रों को आकृतियों और उनके गुणों के बारे में बात करने के और अवसर देने के लिए, छात्रों से आकृतियों के बीच समानताओं और विषमताओं की पहचान करने को कहें।<br>• निम्निलिखत आकृतियाँ (तथा कुछ और युग्म) बनाएँ और छात्रों से प्रत्येक युग्म के बीच समानताएँ और विषमताएँ ढूँढ़ने के लिए कहें।<br>• यह अभ्यास करते समय, कृपया छात्रों से हर संभावित विशेषता पर गौर करने के लिए कहें। |  |
| निम्निलिखत कार्य आकृतियों के बारे में अधिक चर्चा करने तथा आकृतियों के गुणों के आधार पर वर्गीकरण की अवधारणा को समझने में उपयोगी साबित हो सकता है:<br>• बोर्ड पर आकृतियों का एक समूह बनाएँ। दाईं ओर उदाहरण स्वरूप दी गई आकृतियों को देखें<br>• छात्रों से विभिन्न मानदंडों के आधार पर इन आकृतियों को वर्गीकृत करने के लिए कहें (उन्होंने यह गतिविधि  अपनी कार्यपुस्तिका में की है)। इन मानदंडों के कुछ उदाहरणों में 'ऐसी आकृतियाँ जिनकी भुजाएँ वक्र होती हैं और वे आकृतियाँ जिनकी वक्र भुजाएँ नहीं होतीं' या 'ऐसी आकृतियाँ, जिनमें कम-से-कम एक समकोण होता है और वे आकृतियाँ जिनमें एक भी समकोण नहीं होता' आदि  शामिल हैं।<br>• आप इस अभ्यास के लिए आकृतियों का कोई दूसरा समूह भी चुन सकते हैं।<br><br>पूरी कक्षा के छात्रों के साथ मापदंडों पर चर्चा करें। कुछ प्रश्न जिन पर चर्चा की जा सकती है, इस प्रकार हैं:<br>• आपके द्वारा गिठत समूह के सभी सदस्यों द्वारा कौन-कौन से गुण साझा किए गए हैं?<br>• क्या आप उन आकिृतयों के समूह के लिए कोई नाम सोच सकते हैं, जिन्हें आपने वर्गीकरण द्वारा तैयार किया है?<br>• कम-से-कम', 'बिल्कुल' आदि  पिरमाण वाचक शब्दों को समझने के लिए, इस पर चर्चा करें कि किन आिकृतयों में कम-से-कम एक समकोण है, बराबर लंबाई वाली भुजाओं का कम-से-कम एक युग्म है और इसी तरह की अन्य चर्चाएँ करें। न्यून, अिधक, सम और बृहत् कोण जैसे शब्दों को परिभाषित  करने में छात्रों की सहायता करें। |  |

| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| • छात्रों को इन गुणों पर चर्चा करने का अवसर दें और आकृतियों को इन गुणों के आधार पर छाँटें।<br>• छात्रों के मन में कुछ वैकल्पिक धारणाएँ हो सकती हैं, जैसे कि त्रिभुज हमेशा 'सीधा होता है' या समकोण की एक भुजा का क्षैतिज होना और दूसरी का लंबवत होना अनिवार्य है आदि ।<br>• इन धारणाओं को चुनौती देने वाली उचित आकृतियाँ बनाकर इनका समाधान करें। उदाहरण के लिए, अपनी आकृतियाँ बनाते समय आप एक बहुत छोटी भुजा वाला त्रिभुज शामिल कर सकते हैं, या फिर एक घूमा हुआ समकोणीय त्रिभुज बना सकते हैं। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| छात्रों ने कक्षा में खेल की किस प्रकार चर्चा की? कुछ उदाहरण दें | |
| छँटाई की गतिविधि  के दौरान छात्रों ने किन अलग-अलग मापदंडों का उल्लेख किया? कम-से-कम 4 नोट करें। | |
| छात्रों को कौन-कौन से गुण समझ में आए। कम-से-कम 3 लिखें। | |
| आपको कौन-कौन सी आम गलतियाँ नज़र आईं? आपने उनका समाधान कैसे किया? | |

| आत्मचिंतन | |
|---|---|
| सामूहिक गतिविधि  में, क्या छात्रों ने उन्हें दिए गए कार्य पर चर्चा की? कुछ परिचर्चायें  लिखें। | |
| क्या आपके लिए सामूहिक गतिविधि  आयोजित करना आसान था? आपके सामने आई कुछ चुनौतियों के बारे में लिखें। | |
| आपने छात्रों के खेल खेलने के अनुभव का कक्षा कक्ष में हुई पिरचर्चा में कैसे उपयोग किया? | |

## अध्याय 2.2 : आकृतियों का वर्णन

| कक्षा कक्ष परिचर्चाये आयोजित करने के उपाय | |
|---|---|
| आप छात्रों से निम्न प्रश्न पूछकर उन्हें अपनी खेल रणनीतियों का वर्णन करने के लिए कह सकते हैं:<br><br>• उन्होंने प्रासंगिक प्रश्न कैसे निर्धारित किए<br>• कंप्यूटर से मिले जवाबों के आधार पर वे आकृतियों को कैसे बाहर निकालते गए।<br>• कंप्यूटर से उन्हें - 'मुझे समझ नहीं आ रहा है!' जवाब क्यों मिल रहा था। ऐसे प्रश्नों में गणितीय त्रुटि की पहचान करने में उनकी सहायता करें।<br><br>प्रश्न तैयार करने के लिए शुद्ध और सटीक भाषा चुनने में उनकी सहायता करें और उन रणनीतियों पर चर्चा करें, जिसकी सहायता से वे प्रश्नों की न्यूनतम संख्या का उपयोग करके अपराधी की पहचान कर सकेंगे।<br><br>छात्रों को उन विभिन्न रणनीतियों के बारे में बात करने के लिए प्रोत्साहित करें, जिसका उपयोग उन्होंने खेल खेलने के दौरान किया था और फिर इनमें से प्रत्येक के फ़ायदे और नुकसान पर चर्चा करें | संकेत: प्रश्नों की न्यूनतम संख्या का उपयोग करके अपराधी की पहचान करने के लिए, छात्रों को एक ऐसा प्रश्न पूछना चाहिए, जो आकृतियों के समूह को मोटे तौर पर दो बराबर समूहों में बाँटता हो – यानी एक समूह ऐसी आकृतियों का जिनमें उल्लिखित गुण हैं और दूसरा समूह उन आकृतियों का जिनमें उल्लिखित गुण नहीं हैं। इसके आगे के प्रश्न भी इसी सिद्धांत पर आधारित होंगे।<br><br>ध्यान दें कि अब वे आकृतियों के समूह/वर्ग के गुणों पर गौर कर रहे हैं – जब भी कोई प्रश्न पूछा जाता है और उसका उत्तर हाँ या नहीं में दिया जाता है, तो आकृतियों का एक समूह/वर्ग बाहर निकाल दिया जाता है और दूसरा वर्ग रह जाता है। कक्षा कक्ष में होने वाली इस परिचर्चा में छात्र खेल खेलने के संबंध में अपना-अपना अनुभव साझा करेंगे। |
| कक्षा में मिशन 2 खेलने के लिए बोर्ड पर आकृतियों का एक समूह बनाएँ। किसी एक आकृति को अपराधी मानकर छात्रों से कहें कि वे आपसे ऐसे प्रश्न पूछें, जिनकी सहायता से आप अपराधी की पहचान कर सकें। 'हाँ/नहीं/मुझे समझ में नहीं आया' के रूप में उत्तर दें और छात्रों को उस अपराधी की पहचान करने दें, जिसके बारे में आपने सोचा था। आपके लिए आकृतियों का एक समूह नीचे बनाया गया है।<br><br>• अन्य आकृतियों का उपयोग करके आपको प्रासंगिक लगने वाले शब्दों, जैसे समकोण, समानांतर रेखाओं, बृहत् कोण, आसन्न भुजाओं आदि पर चर्चा करें।<br>• छात्रों से पूछें कि 'कम-से-कम' शब्द का क्या अर्थ है। साथ ही, 'कम-से-कम', 'इससे अधिक', 'इससे कम' आदि गुणवाचक शब्दों की प्रासंगिकता और महत्व पर चर्चा करें।<br>• 'हाँ' जवाब वाले प्रश्नों तथा 'नहीं' जवाब वाले प्रश्नों पर चर्चा करें। उस निर्णय की व्याख्या करें, जिसे वे कंप्यूटर से 'नहीं' जवाब मिलने पर देखते हैं। ख़ासतौर पर 'क्या इसमें कम-से-कम एक समकोण है?' – यदि कंप्यूटर का जवाब 'हाँ' होता, तब वे क्या करते? किन आकृतियों को बाहर निकाला जा सकता है? कंप्यूटर का जवाब 'नहीं' होने पर उनकी क्या प्रतिक्रिया होती? अभी कौन-सी आकृतियाँ बाहर निकाली जाएँगी? जैसे प्रश्नों पर चर्चा करें। | चर्चा के लिए बोर्ड पर बनाई जाने वाली आकृतियों के समूह का एक उदाहरण<br><br> |

| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| • छात्रों के मन में एक गलत धारणा हो सकती है कि समानांतर रेखाओं की लंबाई बराबर होनी चाहिए। इसका समाधान करने के लिए, दो अलग-अलग लंबाइयों वाली समानांतर भुजाएँ बनाएँ और उनसे पूछें कि क्या वे समानांतर हैं? साथ ही, अलग-अलग अभिविन्यास में समानांतर रेखाएँ बनाएँ। इसी तरह की अन्य गलत धारणाओं की पहचान करें और उनका समाधान करें।<br>• छात्रों को अलग-अलग आकृतियों के गुणों के बजाय आकृतियों के समूह के साझा गुणों पर नज़र डालने के लिए प्रोत्साहित करें। उनकी यह देखने में मदद करें कि आकृतियों के समूहों की पहचान उस समूह के सभी सदस्यों के उभयनिष्ठ गुणों से की जाती है। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| छात्रों द्वारा खेल खेलने के दौरान इस्तेमाल की गई कुछ रणनीतियों का उल्लेख करें, जिसे उन्होंने कक्षा कक्ष में साझा किया था। | |
| छात्रों ने इस खेल से कौन-सी नई अवधारणाओं को सीखा? | |
| क्या उन्हें अंदाज़ लगाने और सोच-समझकर रणनीति बनाने के बीच फ़र्क समझ में आया? कारण बताएँ। | |
| यह खेल खेलते समय छात्रों के सामने आई कुछ कठिनाइयों का उल्लेख करें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आपको क्यों लगता है कि खेल का मिशन 2 खेलने और कक्षा कक्ष में आयोजित की जाने वाली पिरचर्चा में भाग लेने के बाद छात्रों में निगमनात्मक चिंतन की योग्यता विकिसत होगी? | |
| निगमनात्मक तर्क शक्ति के इस कौशल से छात्रों को ज्यार्मित को और भी अच्छी तरह समझने में कैसे सहायता मिलेगी? | |
| क्या आपको लगता है कि छात्र उनकी अपनी गलितयों से सीख रहे हैं? उदाहरण दें। | |

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# इकाई 3 – आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करना

## अवलोकन

इस युनिट में, छात्र अलग-अलग आकृतियों और उनके गुणों के वर्णन के परे जा कर आकृतियों के किसी समूह के सामान्य गुणों पर गौर करना सीखेंगे। इस तरह उनमें आकृतियों को परिभाषित और वर्गीकृत करने की योग्यता विकसित होगी। वे संक्षिप्त और सटीक परिभाषाओं की आवश्यकता को भी समझ सकेंगे।

इसके लिए, छात्रों को गतिविधि यों की एक श्रंखला पूरी करनी होगी। पहली गतिविधि में वे एक खेल खेलेंगे, जिसमें उन्हें आकृतियों के एक समूह के आम गुण (गुणों) तथा उदाहरणों तथा गैर-उदाहरणों के समूहों की पहचान करनी होगी। दूसरी गतिविधि में, कक्षा को सुकराती संभाषण की पद्धित का पालन करते हुए चतुर्भुज की एक साझा पिरभाषा विकिसत करनी होगी और साथ ही गणित में संक्षिप्त परिभाषाओं की आवश्यकता को समझना होगा। फिर वे विशिष्ट चतुर्भुजों, जैसे कि समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग और समचतुर्भुज को समझकर उनकी कार्यशील पिरभाषाएँ विकिसत करेंगे। इसके बाद दो और गतिविधि याँ आयोजित की जाएँगी, जिसमें वे टर्टल ब्लॉक्स का इस्तेमाल करके तथा डॉट पेपर पर विशिष्ट चतुर्भुज बनाएँगे। इसके अलावा वे उन्हें बनाने के लिए इस्तेमाल किए गए विचारों के सहारे विशिष्ट चतुर्भुजों की कार्यशील पिरभाषाएँ तैयार करेंगे। इस युनिट की अंतिम गतिविधि में, छात्रों को विशिष्ट चतुर्भुजों के इन समूहों में से प्रत्येक के लिए गुण सूचियाँ तैयार करनी होंगी। इन गतिविधि यों के बीच-बीच में पूरी कक्षा के साथ कक्षा परिचर्चाये आयोजित की जाएँगी, जहाँ शिक्षक छात्रों का ध्यान मुख्य बिंदुओं की ओर आकर्षित करेंगे।

## अध्ययन के उद्देश्य

यह युनिट पूरी करने के बाद, छात्र

- आकृतियों को उनके आम गुणों के आधार पर वर्गीकृत कर सकेंगे
- यह समझ सकेंगे कि 'आकृतियों का वर्ग' आम गुणों के एक समूह द्वारा परिभाषित होता है
- किसी आकृति के समूह के साझा आम गुणों की तलाश कर सकेंगे और उनकी पहचान कर सकेंगे और फिर उन गुणों का इस्तेमाल करके आकृतियों के वर्ग की पिरभाषाएँ तैयार कर सकेंगे
- चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग की साझा (कार्यशील) पिरभाषाएँ विकिसत कर सकेंगे और प्रत्येक के उदाहरण और गैर-उदाहरण दे सकेंगे।
- संक्षिप्त परिभाषाओं की आवश्यकता को समझ सकेंगे

## पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृतियों के गुणों का बुनियादी ज्ञान, जैसे 'सभी भुजाएँ बराबर हैं' और 'इसमें एक समकोण है' आदि .
- आकृति का उसके गुणों के आधार पर वर्णन करने की योग्यता

## पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

- लोगो टर्टल प्रोग्रामिंग की बुनियादी क्रियाओं का ज्ञान (केवल सरल कमांड – जैसे कि आगे, दाएँ, बाएँ और क्लीयर स्क्रीन)
- ड्रैग, ड्रॉप तथा इंटरफ़ेस का इस्तेमाल करने की कार्यिविधयों का ज्ञान

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

| पाठ | गतिविधि | गतिविधि का नाम | अनुशंसित अवधि (मिनट) | माध्यम |
|---|---|---|---|---|
| पाठ 3.1: आकृतियों का वर्गीकरण | 1 | पुलिस क्वॉड मिशन - 3 | 35 | डिजटल |
| | 2 | आकृतियों को वर्गीकृत और परिभाषित करना - कक्षा परिचर्चा | 20 | कक्षा परिचर्चा |
| पाठ 3.2: आकृतियों को परिभाषित करना | 1 | चतुर्भुज क्या होता है? | 45 | स्वयं करें |
| पाठ 3.3: विशिष्ट  चतुर्भुजों को परिभाषित करना | 1 | आयत बनाना | 30 | डिजटल |
| | 2 | विशिष्ट  चतुर्भुजों का अन्वेषण करना | 30 | स्वयं करें |
| | 3 | विशिष्ट  चतुर्भुजों को परिभाषित करना | 30 | कक्षा परिचर्चा |
| पाठ 3.4: विशिष्ट चतुर्भुजों की परिभाषा | 1 | गुण सूचियाँ बनाना | 45 | स्वयं करें |
| मूल्यांकन 3 | 3.8 | मूल्यांकन – युनिट 3 | 35 | वर्कशीट |

## अध्याय 3.1: आकृतियों का वर्गीकरण

**कक्षा परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय**

इस गतिविधि का उद्देश्य खेल से मिले ज्ञान को पुख़्ता करना और छात्रों से उन गुणों की तलाश करने का अधिक अभ्यास करवाना है, जो आकृतियों के किसी समूह के लिए एक समान होते हैं और जो उन्हें आकृतियों के किसी दूसरे समूह से अलग बनाते हैं। छात्र किसी आकृतियों के समूह के इन साझा गुणों को समझकर आकृति के समूहों की परिभाषा तैयार करेंगे। इस कक्षा में, आप इस तरह के प्रश्नों पर चर्चा कर सकते हैं:

- किसी आकृति को कौन परिभाषित  करता है?
- आकृतियों का समूह क्या होता है? हम कैसे तय करते हैं कि कोई आकृति किसी ख़ास समूह से संबंधित होगी या नहीं?

आप कक्षा में एक लघु गतिविधि भी पूरी कर सकते हैं: बोर्ड पर आकृतियों के दो समूह बनाएँ। छात्रों से किसी एक समूह के सभी सदस्यों के ऐसे आम गुण की पहचान करने के लिए कहें, जो दूसरे समूह के किसी भी सदस्य में नहीं है। कृपया छात्रों का ध्यान आकृतियों के समूह के आम गुणों की ओर ले जाएँ।
आप बोर्ड पर आकृतियों का एक दूसरा समूह बनाकर भी छात्रों से उनके सभी आम गुणों की पहचान करने के लिए कह सकते हैं। छात्रों से एक कदम आगे बढ़कर आकृतियों के समूह का एक नाम सुझाने के लिए कहा जा सकता है। कुछ अन्य आकृतियाँ बनाएँ और छात्रों से पूछें कि वे उस वर्ग का हिस्सा हैं या नहीं।

छात्रों को कुछ ख़ास गुणों वाली उनकी अपनी आकृतियाँ बनाने के लिए कहें, जैसे ‘एक ऐसी आकृति, जिसमें कम-से-कम एक समकोण हो’ या ‘एक ऐसी आकृति, जिसमें समानांतर भुजाओं का एक युग्म हो’ आदि । ध्यान दें कि उनके द्वारा बनाई जाने वाली सभी आकृतियों में वह गुण मौजूद हो। इस पर ध्यान दें कि एक निश्चित गुण को स्थिर रखते हुए वे अपनी आकृतियों के समूह में क्या-क्या बदलाव लाते हैं।

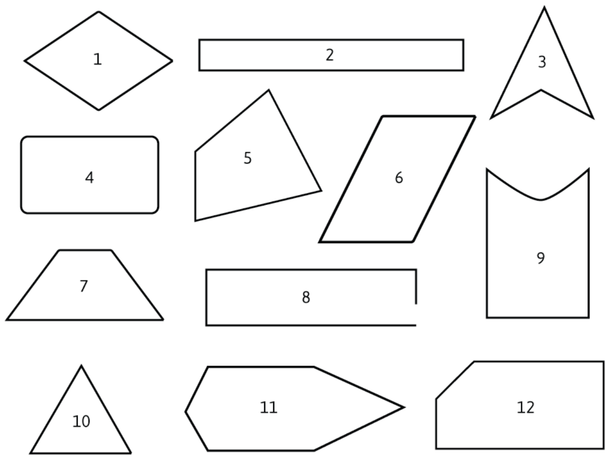
| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| छात्रों की यह समझने में मदद करें कि:<br>आकृति समूह उनके आम गुणों द्वारा परिभाषित  किए जाते हैं।<br>किसी ख़ास वर्ग से संबंधित सभी आकृतियों के कुछ गुण समान होते हैं।<br>जिन आकृतियों में वह गुण नहीं होता, वे उस समूह से संबंधित नहीं होते। उदाहरण के लिए, ऐसी सभी आकृतियाँ, 1) जो चारों तरफ़ से बंद हैं और 4 सीधी भुजाओं से मिलकर बनी हैं 2) जिनकी सभी भुजाएँ बराबर हैं 3) जिनके सभी कोण समकोण हैं और जो वर्ग की श्रेणी में आते हैं। यदि किसी आकृति में ये गुण नहीं हैं तब वह वर्ग नहीं होता है. |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| इस कक्षा परिचर्चा में छात्रों ने ‘आकृतियों के समूह’ का क्या अर्थ समझा? | |
| आपको क्यों लगता है कि खेल का मिशन 3 खेलने से छात्रों को आकृतियों के समूहों को समझने में मदद मिलेगी? | |
| क्या छात्र आकृतियों का समूह निर्धारित करते समय आकृति की सभी विशेषताओं, जैसे कि समानांतर भुजाओं, बराबर भुजाओं, कोण के गुणों आदि पर विचार कर रहे थे? आप कैसे कह सकते हैं? | |
| क्या आपको लगता है कि छात्रों ने आकृतियों पर विश्लेषणात्मक दृष्टि डालनी शुरू कर दी है? | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आकृतियों के समूहों के विचार पर चर्चा करते समय आपको कौन-कौन सी चुनौतियों का सामना करना पड़ा? | |
| आपको क्यों लगता है कि छात्रों की गलतियों का इस्तेमाल कक्षा कक्ष में पढ़ाने के साधन के रूप में किया जा सकता है? | |

## अध्याय 3.2: आकृतियों का परिभाषित करना

| कक्षा कक्ष परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय |
| --- |
| इस कक्षा कक्ष पिरचर्चा में आपको गतिविधि  3.1 और 3.2 से मिली सीखों का औचित्य समझाकर और उन्हें पुख़्ता करना होगा, ताकि छात्र को आकृतियों के विचार को समझ सकें और चतुर्भुज को एक वर्ग के रूप में समझ सकें।<br><br>यह कक्षा कक्ष पिरचर्चा लायनेल परेरा-मेंडोज़ा, एन.सी.टी.एम. के लेख पर आधारित है। यह लेख गणित में परिभाषाओं की भूमिका की समझ विकिसत करने के लिए एक गतिविधि  के रूप में लिखा गया था।<br>संदर्भ: लायनेल परेरा-मेंडोज़ा (1993)। चतुर्भुज क्या होता है? नेशनल काउंसिल ऑफ़ टीचर्स ऑफ़ मैथेमेटिक्स, दि मैथेमेटिक्स टीचर, खंड. 6, क्रमांक. 9 (दिसंबर 1993), पृष्ठ 774-776. |

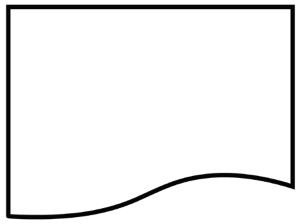



छात्रों से पहले अकेले और बाद में समूहों में काम करके उपर्युक्त आकृतियों को ‘चतुर्भुज है’ और ‘चतुर्भुज नहीं’ के रूप में वर्गीकृत करने के लिए कहें।

चर्चा के दौरान, आप अपनी ख़ुद की आकृतियाँ जोड़ सकते हैं। उनके साथ निम्निलिखत बिंदुओं पर चर्चा करें:

- उन्होंने कुछ आकृतियों को ‘चतुर्भुज है’, जबिक कुछ को ‘चतुर्भुज नहीं’ के रूप में क्यों वर्गीकृत किया?
- छात्रों से उनके उत्तरों का स्पष्टीकरण देने को कहें।
- छात्रों से चतुर्भुज की पिरभाषा बताने को कहें।

चतुर्भुज की सटीक पिरभाषा विकिसत करने के लिए, कक्षा कक्ष में एक पिरचर्चा आयोजित करें। छात्रों द्वारा प्रस्तावित अशुद्ध परिभाषाओं को काटने वाले उदाहरण पेश करें। उदाहरण के लिए, जब छात्र चतुर्भुज को एक 4 भुजाओं वाली आकृति के रूप में परिभाषित  करें, तो आप चार रेखाओं से एक खाली आकृति बनाकर छात्रों से पूछें कि वह उन्हें एक चतुर्भुज लगता है या नहीं। यिद वे कहते हैं कि चतुर्भुज की चार भुजाएँ होनी चाहिए और वह चारों तरफ़ से बंद आकृति होती है, तो एक ऐसी आकृति बनाएँ, जिसकी एक भुजा वक्र हो, और इसी तरह की अन्य आकृतियाँ बनाते जाएँ।



नकी यह देखने में भी सहायता करें कि चतुर्भुज के सभी 4 शीर्ष एक ही समतल पर होते हैं।
सभी चतुर्भुजों के आम गुणों की सूची पर चर्चा करें। आप चाहें तो आप किसी त्रिभुज आकृतियों के समूह पर भी चर्चा कर सकते हैं।
छात्रों से वह वर्कशीट दोबारा देखने को कहें, जिस पर उन्होंने काम किया था और उनसे कहें कि क्या वे अपनी पहले दी गई प्रितक्रियाओं में कोई फेरबदल करना चाहते हैं। उनसे अपनी प्रितक्रिया में फेरबदल के कारण बताने को कहें।

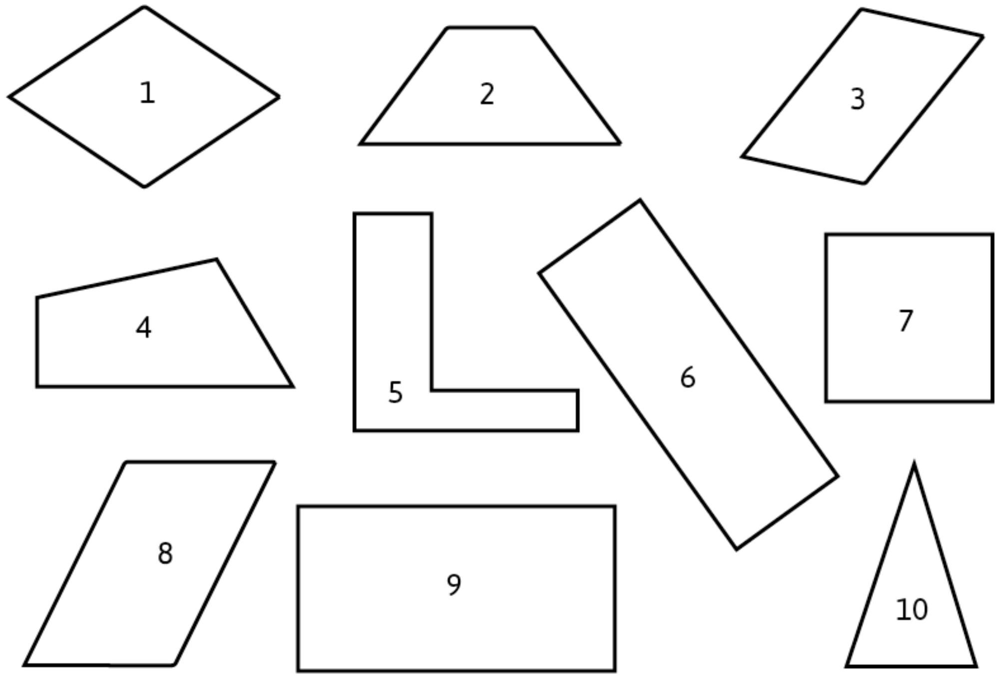
| **स्मरणीय तथ्य** |
|---|
| छात्रों से चतुर्भुज की एक सटीक पिरभाषा तैयार करने को कहें। पिरभाषा में किसी समूह के सभी सदस्य शामिल होने चाहिए और ऐसे सदस्य नहीं होने चाहिए, जो उस समूह से संबंधित न हो। चतुर्भुज की पिरभाषा इस प्रकार होगी:<br>एक चतुर्भुज -<br>1) एक चारों तरफ़ से बंद आकृति होती है<br>2) जिसकी 4 सीधी भुजाएँ होती हैं<br>3) जिसके सभी शीर्ष एक ही समतल पर होते हैं<br>आप उनसे प्रश्न पूछ सकते हैं, जैसे कि क्या वर्ग एक चतुर्भुज होता है? कारण बताएँ।<br>क्या एक समांतर चतुर्भुज एक चतुर्भुज होता है? आदि । |

# मेरे नोट्स

| **छात्रों का प्रेक्षण** | |
|---|---|
| पहली बार वर्कशीट पूरी करते समय, छात्रों द्वारा कौन-कौन सी गलितयाँ कीं गई हैं? तीन उदाहरण दें। | |
| क्या छात्र को सटीक परिभाषाओं का महत्व समझ में आया? | |
| छात्रों द्वारा अंत में चतुर्भुज की क्या पिरभाषा विकिसत की? | |
| 'आकृतियों के समूह' की अवधारणा से छात्रों ने क्या समझा? | |
| **आत्मचिंतन** | |
| चतुर्भुजों की परिभाषाओं पर बातचीत करते समय आपको हुए अनुभव का वर्णन करें। | |
| आपके अनुसार उदाहरणों के साथ गैर-उदाहरणों की मौजूदगी (वर्कशीट में) कितनी लाभप्रद थी? | |
| क्या आपको लगता है कि यह खेल कक्षा को बेहतर ढंग से आयोजित करने में सहायता कर रहा है? कैसे? | |
| आपने छात्रों द्वारा मिशन 3 से मिली सीखों को इस कक्षा कक्ष पिरचर्चा से कैसे जोड़ा? | |

## अध्याय 3.3: विशिष्ट चतुर्भुजों को परिभाषित करना

| कक्षा कक्ष परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय |
| --- |
| कक्षा पिरचर्चा में आप विशिष्ट  चतुर्भुजों को परिभाषित  करने और विशिष्ट  चतुर्भुजों के गुणों को समझने में छात्रों की मदद करेंगे। वे विशिष्ट  चतुर्भुजों की एक साझा विकिसत करेंगे।<br><br>इन चतुर्भुजों के लिए छात्रों द्वारा बताई गई परिभाषाओं से शुरुआत करते हुए, कक्षा संभाषण के द्वारा इन चतुर्भुजों की साझा पिरभाषा तैयार करने की दिशा में काम करें (वैसे ही, जैसा कि चतुर्भुज गतिविधि  के लिए किया था।)<br><br>आप चाहें तो छात्रों द्वारा वर्कशीट पर किए गए कार्य देखकर कक्षा कक्ष में निम्निलिखत कार्य कर सकते हैं। छात्रों से निम्न आकृतियों को ‘समानांतर चतुर्भुज है’ या ‘समानांतर चतुर्भुज नहीं’ के रूप में वर्गीकृत करने के लिए कहें: |




उनसे समानांतर चतुर्भुज की उनकी अपनी पिरभाषा तैयार करने के लिए कहें। आप इस समूह में कुछ और आकृतियाँ शामिल कर सकते हैं, या फिर आपकी अपनी आकृतियाँ बना सकते हैं। विरोधी उदाहरण दे कर उनकी परिभाषाओं को पिरशोधित करें, जैसा कि चतुर्भुजों के उदाहरण में सुझाया गया है।
अन्य विशिष्ट  चतुर्भुजों के लिए आप इससे मिलती-जुलती गतिविधि याँ पूरी कर सकते हैं और छात्रों से आयतों, समचतुर्भुजों और वर्गों की उनकी अपनी पिरभाषाएँ तैयार करने के लिए कह सकते हैं।

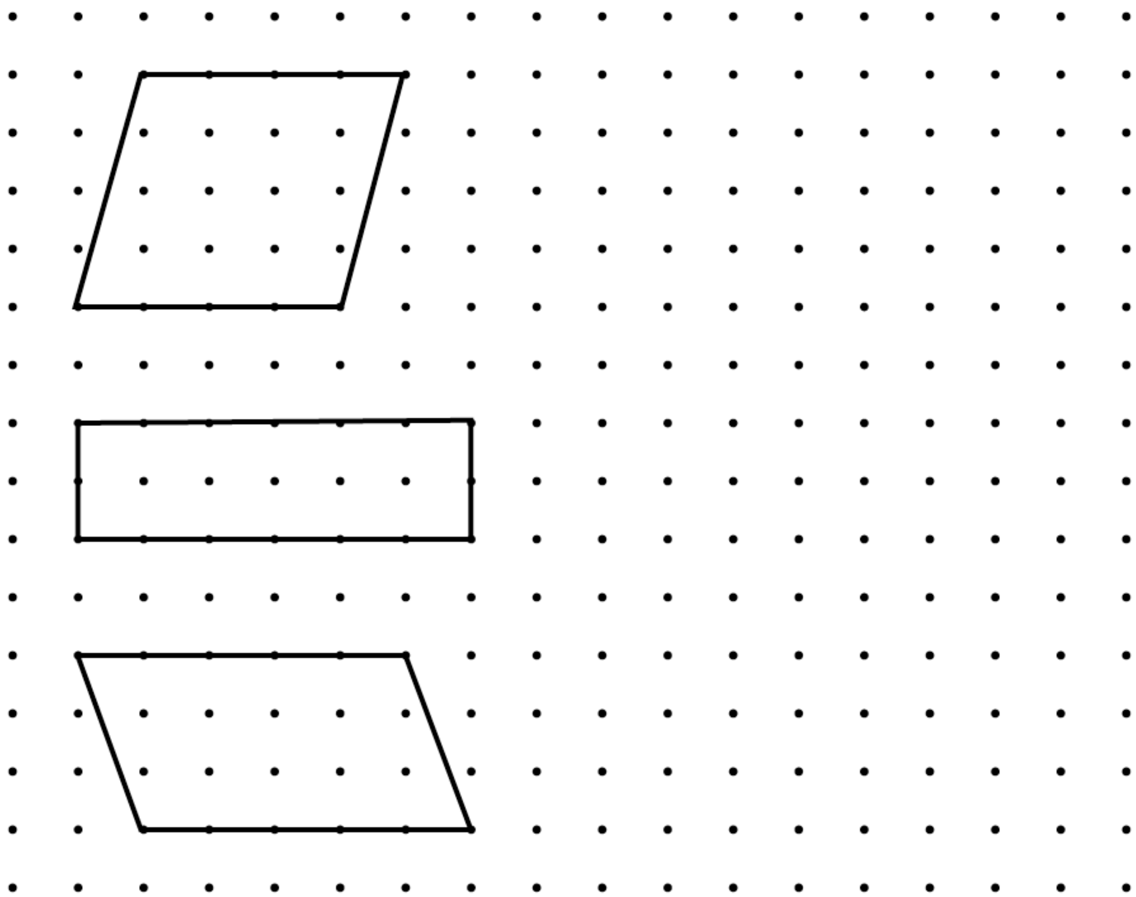
| स्मरणीय तथ्य |
| --- |
| विशिष्ट  चतुर्भुजों की सटीक पिरभाषा तैयार करने में छात्रों की मदद करने के लिए विभिन्न प्रकार के उदाहरण दें। कृपया ध्यान दें कि छात्र सिर्फ़ चतुर्भुज की बनावट पर विचार कर रहे हैं या फिर उसके गुणों पर भी गौर कर रहे हैं।<br>आप निम्न बिंदुओं को समझने में छात्रों की मदद करेंगे:<br>- यह कि पिरभाषाएँ आकृतियों के समूहों के आम गुणों के आधार पर तैयार की जाती हैं।<br>- यह कि आकृतियों के समूहों की एक साझा समझ विकिसत करने और आकृति के इन समूहों के बारे में तर्क-वितर्क करने की दृष्टि से पिरभाषाएँ आवश्यक होती हैं।<br>- हम कक्षा में इस्तेमाल करने के लिए वर्गों, आयतों, समांतर चतुर्भुजों और समचतुर्भुजों की एक साझा (कार्यशील) पिरभाषाएँ विकिसत करेंगे। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| छात्रों को लोगो में आयत बनाते समय कौन-कौन सी किठनाइयों से जूझना पड़ा। कुछ का वर्णन करें। | |
| उल्लिखित कार्य पूरे करने के बाद, समांतर चतुर्भुजों की अंतिम पिरभाषा की जानकारी देने से पहले ऐसी दो पिरभाषाएँ लिखें, जिन्हें छात्रों ने तैयार किया है। | |
| क्या आयतों और वर्गों को ले कर छात्रों के मन में कोई गलत अवधारणा थी? यिद हाँ तो किन्हीं दो का उल्लेख करें। | |
| क्या समांतर चतुर्भुजों और समचतुर्भुजों को ले कर छात्रों के मन में कोई गलत अवधारणा थी? यिद हाँ, तो किन्हीं दो का उल्लेख करें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| विशिष्ट  चतुर्भुजों के संबंध में छात्रों के मन में बैठी गलत अवधारणा को दूर करने में आपको कौन-कौन सी किठनाइयों का सामना करना पड़ा? आप ने उनका समाधान कैसे किया? | |
| आपके विचार से छात्रों के मन में किन कारणों से गलत अवधारणाएँ थी? | |
| कुछ ऐसे प्रश्नों का उल्लेख करें, जिन्हें चर्चा के दौरान छात्रों ने आपसे पूछा था और आपके विचार से वे बेहद महत्वपूर्ण थे। | |

## अध्याय 3.4: विशिष्ट  चतुर्भुजों की परिभाषा

| कक्षा कक्ष परिचर्याये आयोजित करने के उपाय |
| --- |
| इस गतिविधि  में छात्र अकेले-अकेले (या पूर्विनर्धारित छोटे समूहों मे) एक डॉट पेपर पर वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज और समचतुर्भुज बनाएँगे।<br>छात्रों को एक डॉट वाली शीट पर आकृतियाँ बनानी होंगी। |



छात्रों से इसकी स्पष्ट व्याख्या करने को कहें कि दिए गए समांतर चतुर्भुज एक-दूसरे से क्यों अलग हैं। उनसे एक ऐसा समांतर चतुर्भुज बनाने को कहें, जो दिए गए समांतर चतुर्भुजों से अलग हो। उनसे पूछें कि उन्हें क्यों लगता है कि अमुक आकृति एक समांतर चतुर्भुज है। वे समांतर चतुर्भुज बनाने के लिए उसके किन गुणों का उपयोग करते हैं?
साथ ही उनसे भुजा, कोण और विकर्ण के गुणों के पिरप्रेक्ष्य में समांतर चतुर्भुजों के गुणों पर चर्चा करने के लिए कहें। आप इस अभ्यास के क्रम में छात्रों द्वारा बनाई गई अन्य आकृतियों पर भी चर्चा कर सकते हैं।
छात्रों के छोटे-छोटे समूहों के साथ विशिष्ट  चतुर्भुजों, जैसे कि समांतर चतुर्भुजों, समचतुर्भुजों आदि  के आम गुणों पर चर्चा करें। वर्कशीट में दिए गए स्थान में छात्रों द्वारा विशिष्ट  चतुर्भुजों के संबंध में सुझाए गए भुजा, कोण और विकर्ण से संबंधित गुणों की एक सूची बनाकर छात्रों की समझ को पुख़्ता करें।

| स्मरणीय तथ्य |
| --- |
| छात्रों की विकर्ण संबंधी गुणों का खोजने करने में मदद करें। कोण और भुजा के गुणों के विपरीत, यह गुण प्रत्यक्षतः (सीधे) नज़र नहीं आता। विकर्ण एक अतिरिक्त विशेषता है, जिसे हमें आकृति में शामिल करते हैं। छात्रों को उनके द्वारा सुझाए गए अलग विशिष्ट  चतुर्भुजों के गुणों की सूची की तुलना करने के लिए प्रोत्साहित करें। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| विभिन्न समांतर चतुर्भुजों के मामले में छात्रों द्वारा सुझाई गई कुछ समानताओं और असमानताओं का वर्णन करें। | |
| कुछ ऐसी चर्चाओं का उल्लेख करें, जो छात्र समूहों में उनके द्वारा बनाए गए विभिन्न समांतर चतुर्भुजों, आयतों, वर्गों और समचतुर्भुजों के बीच समानताएँ और असमानताएं ढूँढ़ते समय कर रहे थे। | |
| क्या छात्रों ने विकर्ण से संबंधित गुणों का आसानी से पता लगा लिया? | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आपको क्यों लगता है कि समूहों में काम करने से छात्रों को बेहतर ढंग से सीखने में मदद मिली? आप इस गतिविधि या अन्य गतिविधियों के संबंध में आपको हुए अनुभवों पर विचार कर सकते हैं। | |
| क्या आपको लगता है कि छात्र एक-दूसरे की गलितयों से सीख रहे थे? कैसे? | |
| कुछ ऐसी चुनौतियों का उल्लेख करें, जो यह पिरचर्चा आयोजित करते समय आपके सामने आईं। | |

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# ज्यामितीय तर्क
# भाग ॥

# इकाई 1: गुण-आधारित तर्क-क्षमता

## अवलोकन

इस इकाई में दी गई गतिविधि यों के माध्यम से, छात्र धीरे-धीरे विशिष्ट चतुर्भुजों के समूहोंके बीच के जिटल संबंधों को समझने लगेंगे – ख़ासतौर से पदानुक्रिमक वर्ग के संबंधों को। वर्ग समावेशन संबंधों की यह समझ इन संबंधों को वेन आरेखों के रूप में दर्शाकर पुख़्ता की जाएगी।

यह इकाई छात्रों को वैकल्पिक परिभाषाओं के अस्तित्व और परिभाषाओं की आवश्यकता के संबंध में भी जागरूक बनाती है – ख़ासतौर पर साझा परिभाषाओं के बारे में, जिनका उपयोग विचारों के बेहतर संप्रेषण के लिए किया जा सकता है।

पिछली इकाई में छात्रों ने विशिष्ट चतुर्भुजों की गुण सूिचयाँ बनाई थीं। इस इकाई में, वे इन गुण सूचियों को इस तरह व्यवस्थित करेंगे, जिससे वे आकृतियों के विभिन्न समूहों के बीच मौजूद पदानुक्रिमक संबंधों को देख सकेंगे। इसके बाद पुलिस क्वॉड खेल (मिशन 4) खेला जाएगा – जिससे उन्हें वर्ग समावेशन का अनौपचारिक ज्ञान प्राप्त करने का अवसर मिलेगा और इसके पश्चात इस विचार से संबंधित अन्य प्रश्नों, चर्चाओं का दौर चलेगा और छात्रों के मन में इस विचार को पुख़्ता किया जाएगा। इसके बाद छात्र वस्तुओं के वर्गों के बीच के संबंध को चित्रों (वेन आरेखों) के रूप में दर्शाने का तरीका सीखेंगे और इन संबंधों को चित्र के रूप में दर्शाकर वर्ग समावेशन की अपनी समझ को पुख़्ता करेंगे। इस युानट का अंत एक कहानी-आधारित पाठ से होगा, जिसकी सहायता से छात्र समझ सकेंगे कि किसी अवधारणा (या शब्द) को अलग-अलग तरह से परिभाषित करना और साथ ही साझा परिभाषाओं की ज़रूरत को सराहना ज़रूरी है।

## अध्ययन के उद्देश्य

यह युनिट पूरी करने के बाद, छात्र

- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझ सकेंगे (समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग)।
- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच मौजूद वर्ग समावेशन संबंधों को समझकर उनका स्पष्टीकरण दे सकेंगे (उदाहरण के लिए, कोई आयत अनिवार्यतः एक समांतर चतुर्भुज क्यों होता है?)।
- वेन आरेखों के बुनियादी तर्क को समझकर इस तर्क का इस्तेमाल आकृतियों को उनके गुणों के आधार पर वर्गीकृत कर सकेंगे।
- विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच मौजूद वर्ग समावेशन संबंधों को चित्रों के माध्यम से 'देख' और समझ सकेंगे।
- साझा परिभाषाओं की आवश्यकता की सराहना कर सकेंगे।

## पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- आकृतियों के समूहों और उन्हें परिभाषित करने वाले गुणों का ज्ञान।
- समांतर चतुर्भुजों, समचतुर्भुजों, आयतों और वर्गों के गुणों (विकर्ण के गुणों सिहत) की पहचान और उन्हें सूचीबद्ध करने की योग्यता।
- आकृति के समूहों के बीच समानताओं और असमानताओं का पता लगाने के लिए उनके गुणों का विश्लेषण करने की योग्यता।

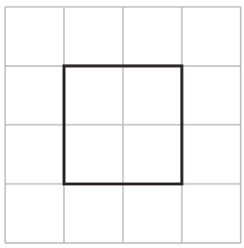
## पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

- ड्रैग, ड्रॉप तथा इंटरफ़ेस के इस्तेमाल से संबंधित कार्यिविधयों का ज्ञान

### पाठ और गतिविधि  के आधार पर विभाजन

| पाठ | गतिविधि | गतिविधि  का नाम | अनुशंसित अविध (मिनट) | माध्यम |
|---|---|---|---|---|
| पाठ 1.1: विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच का संबंध | 1 | पुलिस क्वॉड मिशन 4 | 45 | डिजिटल |
| | 2 | गुणों की सूची बनाना | 45 | स्वयं करें |
| | 3 | विशिष्ट  चतुर्भुजों के बीच का संबंध | 45 | स्वयं करें + कक्षा पिरचर्चा |
| पाठ 1.2: संबंधों का निरूपण | 1 | संबंधों का निरूपण - 1 | 45 | स्वयं करें + कक्षा पिरचर्चा |
| | 2 | संबंधों का निरूपण - 2 | 45 | स्वयं करें + कक्षा पिरचर्चा |
| पाठ 1.3: परिभाषाओं पर चर्चा | 1 | एक समलंब चतुर्भुज क्या होता है? | 45 | डिजिटल |
| मूल्यांकन 4 | 4.7 | मूल्यांकन – युनिट 4 | 45 | वर्कशीट |

## अध्याय 1.1: विशिष्ट  चतुर्भुजों के बीच का संबंध

| कक्षा कक्ष परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय | |
|---|---|
| इस गतिविधि  का उद्देश्य खेल से मिले ज्ञान को पुख़्ता करना तथा वर्ग समावेशन के विचारों को आत्मसात करना है।<br><br>छात्रों से उन रणनीतियों का वर्णन करने के लिए कहें, जिनका उपयोग उन्होंने किया था और साथ ही इस कक्षा पिरचर्चा में पदानुक्रिमक वर्गीकरण को समझने में छात्रों की सहायता करें। | |
| आप बोर्ड पर निम्न आकृति बना सकते हैं:<br><br>छात्रों से पूछें कि क्या कंप्यूटर ने आयत तैयार करते समय ऊपर दी गई आकृति (वर्ग) बनाई थी या नहीं। उनसे पूछें कि उन्हें क्या लगता है कि कंप्यूटर सही था या गलत। उन्हें अपनी प्रितक्रियाओं का कारण बताने के लिए प्रोत्साहित करें। |  |

विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंध को समझने में छात्रों की सहायता करें। दो (या अिधक) विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच की समानताओं और विषमताओं पर चर्चा करें।
आप बोर्ड पर निम्न सूची बना सकते हैं और फिर छात्रों की मदद से यह तालिका भर सकते हैं।

| गुण | वर्ग | आयत | समांतर | चतुर्भुज | समचतुर्भुज |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** केवल 4 रेखा खंडों से मिलकर बनी एक बंद आकृति | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| **2** सम्मुख भुजाओं के युग्मों की लंबाई बराबर होती है | | | | | |
| **3** सम्मुख भुजाओं के युग्म समानांतर होते हैं | | | | | |
| **4** सम्मुख कोण बराबर होते हैं | | | | | |
| **5** विकर्ण एक-दूसरे का प्रितच्छेदन करते हैं | | | | | |
| **6** सभी कोण समकोण/बराबर होते हैं | | | | | |
| **7** आसन्न कोण बराबर होते हैं | | | | | |
| **8** विकर्णों की लंबाई बराबर होती है | | | | | |
| **9** सम्मुख भुजाओं की लंबाई बराबर होती है | | | | | |
| **10** सभी 4 भुजाओं की लंबाई बराबर होती है | | | | | |
| **11** विकर्ण एक-दूसरे के लंबवत होते हैं। | | | | | |

### कक्षा कक्ष परिचर्चाये आयोजित करने के उपाय

विशिष्ट चतुर्भुजों की श्रेणियों के आम गुणों के साथ-साथ उन गुणों की तरफ़ ध्यान आकर्षित करें, जिनके लिहाज़ से उनमें फ़र्क होता है। छात्रों से पूछें:

- आयत के क्या गुण होते हैं?
- वर्ग के क्या गुण होते हैं?
- क्या आयत के सभी गुण एक वर्ग में भी होते हैं?
- क्या किसी वर्ग को एक आयत कहा जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
- क्या किसी आयत को वर्ग कहा जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं?
- वर्ग में ऐसे कौन से गुण होते हैं, जो आयत में नहीं होते?

विशिष्ट चतुर्भुजों के अलग-अलग युग्मों के साथ मिलते-जुलते प्रश्न दोहराएँ और छात्रों को गुण सूची के माध्यम से पदानुक्रिमक वर्गीकरण के विचारों से अवगत करवाएँ।

### स्मरणीय तथ्य

छात्रों को यह समझने में किठनाई हो सकती है कि कोई आकृति एक ही समय में दो अलग-अलग वर्गों से कैसे संबंधित हो सकती है। उदाहरण के लिए, छात्रों को यह समझने में किठनाई हो सकती है कि एक वर्ग एक आयत भी होता है।
हो सकता है कुछ छात्र आयत और वर्ग को इस तरह परिभाषित करें कि आयत की पिरभाषा में वर्ग को आयत की श्रेणी से बाहर कर दिया जाए। ऐसा करने के लाभ और हानि पर चर्चा करें।
छात्रों को इसके और उदाहरण दें कि कोई आकृति किसी एक से अिधक श्रेणियों से कैसे संबंधित हो सकती है। आप इस पर भी एक चर्चा शुरु कर सकते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज एक समद्विबाहु त्रिभुज भी होता है, या एक षट्भुज एक बहुभुज भी होता है या एक चतुर्भुज एक बहुभुज भी होता है।

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| छात्रों ने 'क्या एक वर्ग एक आयत भी होता है?' प्रश्न का पहले-पहल क्या उत्तर दिया? कुछ ऐसी प्रतिक्रियाओं और उनके संबंध में छात्रों द्वारा बताए गए कारणों का उल्लेख करें। | |
| ऐसी दो रणनीतियों का उल्लेख करें, जिन पर छात्रों ने खेल खेलते समय चर्चा की। | |
| छात्रों को वर्ग समावेशन के विचार से अवगत करवाते समय, आपने कौन-कौन से उदाहरणों पर चर्चा की? | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आपको क्यों लगता है कि छात्रों को यह विचार स्वीकार करने में कठिनाई हो सकती है कि एक ही आकृति के दो अलग-अलग नाम हो सकते हैं? (वर्ग समावेशन के विचार के संदर्भ में) | |
| उन चुनौतियों का उल्लेख करें, जो यह कक्षा कक्ष परिचर्चा आयोजित करते समय आपके सामने आईं। | |
| आपको क्यों लगता है कि वर्ग समावेशन के विचार से परिचित होने पर छात्रों को और सहायता मिलेगी? | |

## अध्याय 1.2: संबंधों का निरूपण

**कक्षा परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय**

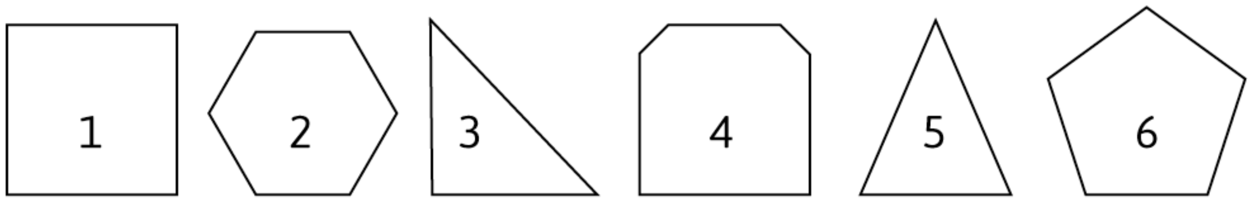
इस गतिविधि  का उद्देश्य वेन आरेखों को समझने में छात्रों की मदद करना है और विशिष्ट  चतुर्भुजों को चित्र के रूप में दर्शाकर उनके वर्ग समावेशन के संबंधों के ज्ञान को पुख़्ता करना है।
आप छात्रों से ख़ुद को अलग-अलग प्रकार के समूहों में व्यवस्थित करने के लिए कह सकते हैं। कुछ सुझाव इस प्रकार हैं:

a. लड़के और लड़कियाँ
b. ऐसे लोग, जो चश्मा पहनते हैं और ऐसे लोग, जिनकी पोशाक में नीला रंग है,
c. कक्षा 9 के छात्र और कक्षा 9 की छात्राएँ।

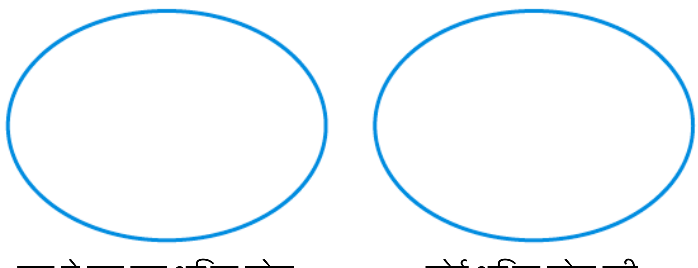
वेन आरेखों का उपयोग करके उनके साथ निरूपणों पर चर्चा करें और
वेन आरेखों का उपयोग करके ब्लैकबोर्ड पर इन संबंधों का निरूपण करें।

छात्रों की यह समझने में मदद करें कि वे आकृतियों के एक समूह तथा उनके बीच के संबंधों को दर्शाने के लिए वेन आरेखों का किस तरह उपयोग कर सकते हैं। संबंध 3 संभावित प्रकार के हो सकते हैं
- जहाँ एक समूह की कुछ वस्तुएँ दूसरे वर्ग की वस्तुओं के समान हैं
- जहाँ एक समूह पूरी तरह दूसरे समूह में समाहित है
- जहाँ एक समूह का कोई भी तत्व दूसरे समूह में मौजूद नहीं है।

छात्रों से एक समूह में वर्कशीट में दिए इस तरह के कार्यों पर चर्चा करने के लिए कहें:
1. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति से संबंधित संख्या को दिए गए वेन आरेख के उचित स्थान में लिखें।



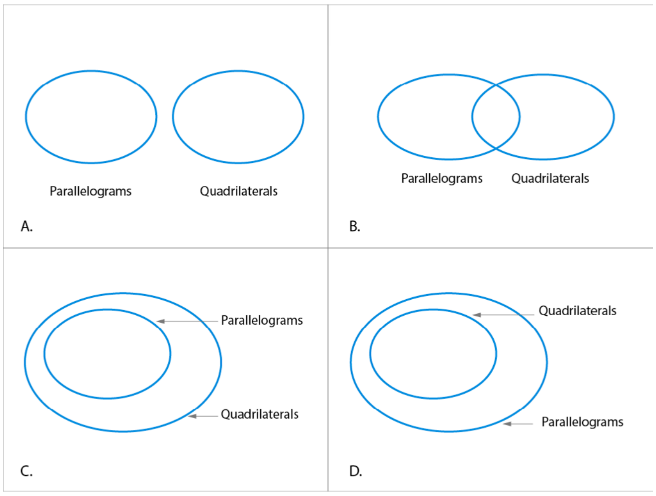

छात्रों को इन 3 प्रकार के संबंधों का पर्याप्त उदाहरणों के साथ पिरचय दें (जैसा कि वर्कशीट में दिया गया है), साथ ही उन्हें ऐसे वर्गों के उदाहरण भी देने को कहें, जो उक्त तरीके से संबंधित हैं। जब वे वर्गों के बीच मौजूद अलग-अलग प्रकार के संबंधों और उन्हें निरूपित करने का तरीका समझ लें, तो विशिष्ट  चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझने और उन्हें निरूपित करने के विषय पर आगे बढ़ जाएँ। वर्कशीट में दिए गए कार्यों से मिलते-जुलते कार्य सहायक साबित हो सकते हैं



कम से कम एक अधिक कोण

कोई अधिक कोण नही

| कक्षा परिचर्चाये आयोजित करने के उपाय |
|---|
| 2 .इनमें से कौन, समांतर चतुर्भुजों और चतुर्भुजों का सही निरूपण है और क्यों? (हो सकता है आप चतुर्भुजों और समांतर चतुर्भुजों की परिभाषा और उनके गुणों का उपयोग करके देखना चाहें कि वे किस तरह संबंधित हैं।) |




आप छात्रों से उनके उत्तरों का स्पष्टीकरण देने के लिए कह सकते हैं।
छात्रों के साथ चर्चा करें – क्या सभी चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं? क्या सभी समांतर चतुर्भुज, चतुर्भुज होते हैं, आदि ।
आप अन्य विशिष्ट चतुर्भुजों के साथ भी इसी तरह के अभ्यास कर सकते हैं।
छात्रों से विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों की व्याख्या करने को कहें। उदाहरण के लिए, एक वर्ग एक आयत भी होता है, वर्ग और आयत समांतर चतुर्भुज भी होते हैं आदि । सभी वर्ग समचतुर्भुज होते हैं, कुछ समचतुर्भुज आयत होते हैं, आदि ।
विशिष्ट चतुर्भुजों के गुणों पर नज़र डालने और फिर उनके आधार पर संबंधों को समझने पर ज़ोर दें।
छात्रों के साथ निम्न कार्य के बारे में चर्चा करें और किसी आरेख में विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को निरूपित करने वाला एक आरेख तैयार करने में उनकी मदद करें:
ऊपर दिए गए कार्यों में चुने गए निरूपणों का उपयोग करके, एक ही आरेख में चतुर्भुज, समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत और वर्ग इन सभी को दर्शाएँ। चतुर्भुजों को दर्शाने के लिए एक आयत का इस्तेमाल करें और शेष चतुर्भुजों को दर्शाने के लिए उपयुक्त गोलों का उपयोग करें।

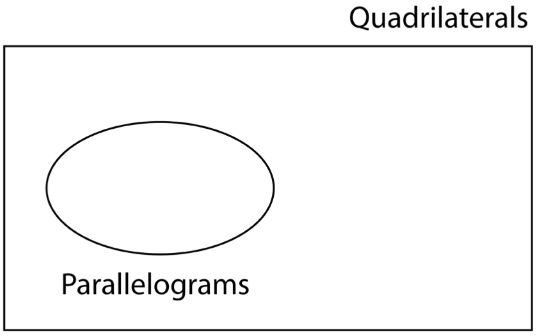
| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| वास्तिवक जीवन के प्रासंगिक उदाहरणों से शुरुआत करते हुए वेन आरेखों को समझने में छात्रों की सहायता करें<br>• राज्य और देश<br>• कक्षा 9 के छात्र और सम्पूर्ण विद्यालय<br>• ऐसे लोग जिन्हें क्रिकेट पसंद हैं और ऐसे लोग जिन्हें फ़ुटबॉल पसंद है आदि ।<br>छात्रों को यह समझना होगा कि इन समूहों के बीच विभिन्न प्रकार के संबंध हैं – वे असंबद्ध (ओवरलैप न होने वाले), ओवरलैप होने वाले हो सकते हैं या एक समूह के अंदर दूसरा समूह समाहित हो सकता है। उदाहरण दे कर इन संबंधों को वेन आरेखों में निरुपित करने का तरीका समझने में उनकी मदद करें। इस ज्ञान का उपयोग करके विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के सम्बन्धों को निरूपित करने में उनकी सहायता करें। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| क्या छात्र वेन आरेखों के विचार को समझ सके? क्या वास्तविक जीवन से जुड़े उदाहरणों का उपयोग करने से मदद मिली? | |
| छात्रों के विशिष्ट चतुर्भुजों के बीच के संबंध की व्याख्या कैसे की? कोई दो उदाहरण दें। | |
| ऐसी कुछ कठिनाइयों का उल्लेख करें, जिनसे कक्षा पिरचर्चा के दौरान छात्रों को जुझना पड़ा। | |
| | |
| आपके विचार से छात्रों को विशिष्ट  चतुर्भुजों के बीच के संबंधों को समझने में क्यों किठनाई आ रही थी? इसके क्या कारण हो सकते हैं? | |
| क्या आपको लगता है कि हमने छात्रों की मदद से जो गतिविधि याँ आयोजित की थीं, वे उनकी तर्क-क्षमता को विकिसत करने में सहायक होंगी? कैसे? | |
| ऐसी कुछ किठनाइयों का उल्लेख करें, जो कक्षा कक्ष पिरचर्चा के दौरान आपके सामने आईं। | |

## अध्याय 1.3: परिभाषाओं पर चर्चा

| कक्षा कक्ष परिचर्चाये  आयोजित करने के उपाय |
|---|
| इस गतिविधि  का उद्देश्य छात्रों की यह समझने में मदद करना है कि अलग-अलग लोग एक ही शब्द के अलग-अलग अर्थ निकालते हैं, जिससे गलतफ़हमी और उलझन पैदा होती है। यह गतिविधि  साझा परिभाषा की आवश्यकता पर ज़ोर देती है। आप वास्तिवक जीवन से जुड़े कुछ ऐसे उदाहरण दे सकते हैं, जिसमें एक ही शब्द के अलग-अलग अर्थ हो सकते हैं – जैसे इंटरेस्ट, लेफ़्ट, बैलेंस, वॉल्यूम आदि .<br>आप कुछ 'गैर-गणितीय ' शब्दों पर भी चर्चा कर सकते हैं, जैसे कि शहर, पर्वत, अच्छाई आदि  शब्दों की पिरभाषाएँ।<br>'एक समलंब चतुर्भुज क्या होता है' कहानी पर चर्चा करें। पूरी कहानी बयान करने के बाद, कहानी के तीन बच्चों द्वारा इस्तेमाल की गई परिभाषाओं पर चर्चा करें। छात्रों से समलंब चतुर्भुज की उनकी अपनी पिरभाषा तैयार करने को कहें।<br>1. समलंब चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी भुजाओं का एक युग्म समानांतर होता है (कानसू की पिरभाषा)<br>2. समलंब चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज होता है, जिसकी भुजाओं का कम-से-कम एक युग्म समानांतर होता है (ज़ो की पिरभाषा)<br>3. समलंब चतुर्भुज दरअसल चतुर्भुज का एक दूसरा नाम है (साहिर की पिरभाषा) |




छात्रों से पूछे कि इनमें से किसकी पिरभाषा सही है और क्यों? छात्रों से पूछें कि क्या एक से अिधक पिरभाषाएँ सही हो सकती हैं?
छात्रों से इसकी कल्पना करने को कहें कि यिद उक्त बच्चों में से प्रत्येक की समलंब चतुर्भुज के संबंध में उनकी अपनी पिरभाषा हो, तब क्या होगा।

छात्रों को ऊपर दी गई तीन परिभाषाओं के आधार पर निम्निलिखत वेन आरेख में समलंब चतुर्भुजों को निरूपित करने को कहें: छात्रों के साथ इस पर चर्चा करें कि प्रत्येक पिरभाषा को किस तरह अलग-अलग ढंग से वेन आरेख में निरूपित किया जाएगा। छात्रों से उनके द्वारा निर्मित वेन आरेख की व्याख्या करने के लिए कहें और इसके लिए उन्हें समलंब चतुर्भुजों और समांतर चतुर्भुजों के बीच के संबंध का वर्णन करने के लिए कहें, जैसे

A. सभी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं।
B. सभी समांतर चतुर्भुज समलंब चतुर्भुज होते हैं।
C. सभी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होते हैं।
D. कोई भी समलंब चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज नहीं होता।

ऊपर दी गई परिभाषाओं पर विस्तृत चर्चा करें।

छात्रों से उनकी पाठ्य पुस्तक में दी गई पिरभाषा की पहचान करने के लिए कहें। वे अवधारणाओं के सामूहिक अर्थों पर चर्चा कर सकते हैं।

छात्रों से पूछें कि पाठ्य पुस्तक में समलंब चतुर्भुज की केवल एक पिरभाषा क्यों दी गई है? उनके पूछे कि यिद पाठ्य पुस्तक में अनेक पिरभाषाएँ होतीं, तो क्या होता? उनसे पूछें कि उनके विचार से उनकी पाठ्य पुस्तक में दी गई पिरभाषाएँ किसने तैयार की होंगी?

| **स्मरणीय तथ्य** |
|---|
| आपको छात्रों की यह समझने में सहायता करनी होगी कि परिभाषाएँ दरअसल कई अर्थों से मिलकर बनी होती है और उनका एक समान होना आवश्यक है। छात्रों की यह देखने में मदद करें कि अलग-अलग परिभाषाएँ स्वीकार्य तो हैं, लेकिन लोगों के मन में उनकी साझा समझ होनी चाहिए और परिभाषा के स्वीकार होने के बाद उसके तार्किक परिणामों को भी स्वीकार करना होगा। उनकी यह समझने में मदद करें कि समलंब चतुर्भुजों के मामले में अलग-अलग परिभाषाएँ होती हैं।<br>अपनी पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषा पर नज़र डालें और छात्रों को उसे समलंब चतुर्भुज की एक साझा परिभाषा मानकर उस पर काम करने के लिए कहें। |

# मेरे नोट्स

| **छात्रों का प्रेक्षण** | |
|---|---|
| क्या छात्रों ने उनकी अपनी परिभाषाएँ तैयार कीं? उनमें से कुछ का उल्लेख करें। | |
| क्या छात्रों ने इस पर विचार किया कि किसी अवधारणा की केवल एक परिभाषा हो सकती है। उनके द्वारा दिए गए कुछ कारणों का उल्लेख करें। | |
| किसी अवधारणा की अनेक परिभाषाएँ होने की बात पर छात्रों ने क्या तर्क-वितर्क किए? उदाहरण दें। | |
| उनके विचार से पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषाएँ किसने तैयार की थीं? उनके कुछ विचारों का उल्लेख करें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| क्या छात्र इस विचार से सहमत थे कि एक ही अवधारणा की अलग-अलग परिभाषाएं हो सकती हैं? क्या आपके लिए छात्रों के साथ इस पर चर्चा करना आसान था? आपके सामने आई कुछ चुनौतियों का उल्लेख करें। | |
| आपकी पाठ्य पुस्तक में समलंब चतुर्भुज की क्या परिभाषा दी गई है? | |
| इस पाठ के बाद, क्या आप पाठ्य पुस्तक में दी गई परिभाषाओं के संबंध में किसी दूसरे ढंग से विचार कर रहे हैं? कैसे? | |
| कुछ ऐसी अन्य अवधारणाओं का उल्लेख करें, जिनके लिए आपको अलग-अलग परिभाषाएँ देखने को मिली हैं। | |

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# इकाई 2 : प्रमाणों की जरूरत को समझना

## अवलोकन

इस इकाई में विद्यार्थी इस बात को समझते हैं कि जाँच और आगमनात्मक तर्क गणितीय सिद्धांतों को खोजने के महत्वपूर्ण तरीके होते हैं लेकिन ये दोषमुक्त नहीं होते, और इसलिए हमें निगमनात्क तर्कों और 'प्रमाणों' की आवश्यकता होती है।

इस विचार तक समझ निर्मित करने के लिए विद्यार्थी ऐसी गतिविधियों से शुरुआत करते हैं जिनमें उन्हें विभिन्न पैटर्नों का अवलोकन करके कुछ अनुमान लगाना होते हैं। वे विभिन्न उदाहरणों में अपने अनुमानों को जाँचते हैं, और इस प्रकार जाँच तथा प्रमाण के बीच के भेद को समझना शुरू करते हैं। एक सक्रिय गतिविधि के द्वारा वे इस बात को भी जान लेते हैं कि किसी अनुमान को असत्य प्रमाणित करने के लिए एक ही विपरीत उदाहरण पर्याप्त होता है। उन्हें यह भी पता चलता है कि किसी अनुमान को निर्णायक रूप से 'प्रमाणित' करने के लिए आगमनात्मक तर्क पर्याप्त नहीं होते। विद्यार्थियों का निगमनात्मक तर्क वाले 1-2 प्रमाणों से भी परिचय कराया जाता है।

विद्यार्थी सबसे पहले अलग-अलग प्रकार के चतुर्भुजों के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाए गए चतुर्भुजों के बारे में जाँच करते हैं। शिक्षकों के मार्गदर्शन में होने वाली पड़तालों से शुरू करके धीरे-धीरे वे स्वतंत्र रूप से अपने अनुमान लगाने लगते हैं। इसके बाद, विद्यार्थी किसी बहुभुज की भुजाओं की संख्या और उसके अंतः कोणों के योग के बीच के संबंध की जाँच करते हैं। पहले वे चतुर्भुजों के लिए मार्गदर्शित अनुमान लगाते हैं, इसे सामान्य नियम के रूप में सिद्ध करते हैं, और फिर इसे 'प्रमाण' के रूप में स्थापित करने में लग जाते हैं, जिसमें शिक्षक उनकी मदद करते हैं। इसके बाद, वे जियोजेब्रा साफ्टवेयर में अलग-अलग बहुभुजों के कोणों के योग के बारे में पड़ताल करते हैं, एक सामान्य 'नियम' बनाते हैं और फिर अनौपचारिक निगमनात्मक तर्कों द्वारा उस नियम को सही सिद्ध करते हैं। इसके अगले पाठ में विद्यार्थियों को एक कार्य दिया गया है जिसमें वे कुछ उदाहरणों के आधार पर एक (बहुत स्पष्ट लगने वाले) नियम तक पहुँच सकते हैं, जहाँ उनका सामना ऐसे विपरीत उदाहरण से होता है जो उनके नियम को खंडित कर देता है। इससे उन्हें यह सीख मिलती है कि उदाहरणों के आधार पर बनाए गए सामान्य नियम दोषयुक्त होते हैं, और इसीलिए गणित में निगमनात्मक प्रमाणों की जरूरत होती है।

मध्य बिन्दु के जाँच की गतिविधि को पूरा करने के लिए विद्यार्थियों को इस औपचारिक निगमनात्मक प्रमाण से भी परिचित करा दिया जाता है कि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज, समानांतर चतुर्भुज होता है। यह इकाई एक अनौपचारिक गतिविधि के साथ समाप्त होती है जिसमें यह देखने की कोशिश की गई है कि क्या विद्यार्थी इकाई में शामिल मूल विचारों (तर्क और प्रमाण से संबंधित) में से कुछ को वाकई समझ पाए हैं और उन्हें उपयोग कर पा रहे हैं या नहीं।

## अध्ययन के उद्देश्य

इस इकाई को समझने के बाद विद्यार्थी

- 'अनुमान' शब्द का अर्थ समझ जाएंगे, विभिन्न पैटर्न का अवलोकन करके अपने अनुमान बना पाएंगे और उन्हें सही सिद्ध कर पाएंगे।
- अनुमानों को स्पष्ट ढंग से व्यक्त करने लगेंगे।
- किसी अनुमान को 'जाँचने' और उसे प्रमाणित करने के बीच के अंतर को समझ पाएंगे।
- अनौपचारिक (निगमनात्मक) तर्क का प्रयोग करते हुए अनुमानों को सिद्ध करना सीख जाएंगे।
- इस बात को समझेंगे कि कोई एक विपरीत उदाहरण भी किसी कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए पर्याप्त होता है।
- इस बात को समझेंगे कि गणित में किसी कथन को निर्णायक रूप से सत्य सिद्ध करने के लिए कितने भी उदाहरण पर्याप्त नहीं होते हैं।
- आगमनात्मक तर्क में दोष हो सकने की संभावना को समझेंगे, जिसके नतीजे में निगमनात्मक तर्कों की जरूरत को भी समझेंगे।
- किसी चतुर्भुज के कोणों के योग के गुणधर्म को भी समझेंगे और उसका उपयोग कर पाएंगे।
- चतुर्भुज पर पाठ्यपुस्तक में जो अध्याय है उसमें दिए गए कुछ प्रमेयों/ निष्कर्षों को सत्य प्रमाणित कर पाएंगे।

## पूर्व अपेक्षित गणितीय ज्ञान

- व्यवस्थाओं को देख पाने की क्षमता
- दी गई धारणाओं/ मान्यताओं के आधार पर किसी निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए तर्क करने की क्षमता
- विशेष चतुर्भुजों, बहुभुजों आदि की परिभाषाओं की समझ
- त्रिभुज के कोणों के योग के गुणधर्म की जानकारी, और उसे सवालों में उपयोग कर पाना
- समानांतर रेखाओं और प्रतिच्छेदी रेखाओं से संबंधित गुणधर्मों (वैकल्पिक कोणों के युग्म समान होते हैं, आदि) की जानकारी
- मध्य बिन्दु प्रमेय का निष्कर्ष (शिक्षक द्वारा तैयार की गई पड़ताल के माध्यम से जाना गया हो)

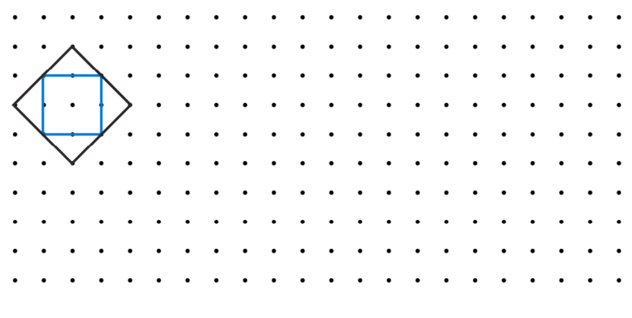
## पूर्व अपेक्षित आई.सी.टी. ज्ञान

- जिओजेब्रा साफ्टवेयर की बुनियादी इंटरफेस और टूल्स (उपकरणों) से परिचित होना

## पाठ और गतिविधि के आधार पर विभाजन

| पाठ | गतिविधि | गतिविधि का नाम | अपेक्षित अवधि (मिनिट) | रूप |
|---|---|---|---|---|
| पाठ 2.1 : मध्यबिन्दु – पड़ताल | 1 | मध्य बिन्दु पड़ताल | 45 मिनिट | सक्रिय |
| पाठ 2.2 : कोणों के योग का गुणधर्म | 1 | चतुर्भुजों के कोणों के योग का गुणधर्म | 45 मिनिट | सक्रिय |
| | 2 | बहुभुजों के कोणों के योग के गुणधर्म की पड़ताल | 90 मिनिट | डिजिटल |
| पाठ 2.3 : प्रमाण की आवश्यकता | 1 | प्रमाण की आवश्यकता | 45 मिनिट | सक्रिय + कक्षा में चर्चा |
| पाठ 2.4 : प्रमाण का लेखन | 2 | चतुर्भुजों के बारे में मध्य बिन्दु के निष्कर्ष को सही सिद्ध करना | 45 मिनिट | कक्षा में चर्चा |
| पाठ 2.5 : सही और गलत सिद्ध करना | 1 | सही और गलत कथन | 45 मिनिट | सक्रिय |
| आकलन 5 | 5.7 | अंतिम आकलन | 45 मिनिट | डिजिटल |

## अध्याय 2.1: मध्यबिन्दु – पड़ताल

<table>
<tr><th colspan="2">कक्षा में चर्चाओं को सुगम बनाने की योजनाएं</th></tr>
<tr><td>मध्य बिन्दु की पड़ताल की गतिविधि विद्यार्थियों को अनुमान लगाने और उन्हें जाँचने का मौका देगी।<br><br>विद्यार्थियों से डॉट पेपर पर विभिन्न वर्गों की प्रत्येक भुजा के मध्य बिन्दुओं को मिलाने को कहें, और फिर पूछें कि उन्हें कौन सा चतुर्भुज मिला। विद्यार्थी इस तरह के अनुमान लगाएंगे -<br><br>किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनने वाला चतुर्भुज ______________________________ होता है।</td><td></td></tr>
</table>

विद्यार्थियों से पूछें कि किसी आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर उन्हें कौन सा आकार प्राप्त होगा। उनके अनुमानों को सही सिद्ध करने में उनकी सहायता करें। इन अनुमानों की जाँच करने के लिए विद्यार्थी डॉट पेपर पर आयत बनाए और उनकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाए। इसी प्रकार विद्यार्थियों से सम चतुर्भुज और समानान्तर चतुर्भुज के लिए अनुमान लगाने को कहें। इसके बाद विद्यार्थी इन अनुमानों से सभी चतुर्भुजों के लिए व्यापक अनुमान लगाएंगे।
विद्यार्थियों से पूछें :

- आपने अपना अनुमान कैसे लगाया?
- क्या आपको विश्वास है कि यह अनुमान सभी चतुर्भुजों के लिए सही होगा? आप यह कैसे जानते हैं?

स्वतंत्र रूप से अपने अनुमान बनाने में और उन्हें सही सिद्ध करने में विद्यार्थियों की सहायता करें। विभिन्न प्रकार के चतुर्भुजों के बारे में विद्यार्थियों की समझ का यहाँ उपयोग किया जा सकता है।

| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| इन बातों को देखने में विद्यार्थियों की सहायता करें :<br>किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक वर्ग ही मिलता है।<br>किसी भी आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक सम चतुर्भुज मिलता है।<br>किसी भी सम चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक आयत मिलता है।<br>किसी भी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक समानान्तर चतुर्भुज मिलता है।<br>आप समूह के समावेश (क्लास इन्क्लूज़न) के विचार को यहाँ पुनः दोहरा सकते हैं। किसी भी चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर हमें एक समानान्तर चतुर्भुज मिलता है। विशेष चतुर्भुजों के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर हमें विभिन्न प्रकार के विशेष चतुर्भुज मिलते हैं और वे सभी समानान्तर चतुर्भुज होते हैं। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| क्या विद्यार्थी सभी विशेष चतुर्भुजों को उनके गुणधर्मों के द्वारा पहचान पाए? | |
| वर्गों और आयतों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने के बारे में विद्यार्थियों ने जो अनुमान लगाए उनमें से कुछ लिखें। | |
| समानान्तर चतुर्भुजों और सम चतुर्भुजों की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने के बारे में विद्यार्थियों द्वारा किए गए अनुमानों में से कुछ लिखें। | |
| क्या विद्यार्थी अपने अनुमानों को सही सिद्ध कर पाए? ऐसे कम से कम दो उदाहरण बताएं। | |
| क्या विद्यार्थी अपने अनुमानों को व्यक्त करने के लिए सटीक भाषा का उपयोग कर रहे थे? अपने अनुमानों को व्यक्त करते समय उन्हें भाषा और शब्दावली संबंधी किन समस्याओं का सामना करना पड़ रहा था? कुछ का उल्लेख करें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| अनुमान लगाते समय विद्यार्थियों को किस तरह की समस्याओं का सामना करना पड़ा? | |
| क्या इस गतिविधि में सभी विद्यार्थियों ने भाग लिया? अगर सब ने भाग नहीं लिया तो भाग न लेने के क्या कारण रहे होंगे? | |
| विद्यार्थियों द्वारा अनुमान लगाने और उन्हें सही सिद्ध करने के तरीके से क्या आपको उनका आकलन करने में मदद मिलती है? अगर हाँ, तो कैसे? | |
| अनुमान लगाते समय विद्यार्थियों से कौन सी गलतियां हुईं? क्या आप गलतियां सुधारने में उनका मार्गदर्शन कर पाए? किस तरह? | |

## अध्याय 2.2: कोणों के योग का गुणधर्म

**कक्षा में चर्चाओं को सुगम बनाने की योजनाएं**

इस गतिविधि का उद्देश्य विभिन्न पैटर्न का अवलोकन करके चतुर्भुजों के कोणों के योग के गुणधर्म को समझना है। विद्यार्थी एक अनुमान लगाते हैं और फिर अपने परिणाम से एक सामान्य नियम बनाते हैं। वे जाँचने और प्रमाणित करने के बीच के फर्क को समझते हैं और उनमें भेद कर पाते हैं। यह गतिविधि उन्हें पैटर्न को देखने तथा औपचारिक तर्क करने (और इस मामले में, प्रमाण देने) के बीच के संबंध को समझने में भी मदद करती है।
विद्यार्थियों से विभिन्न चतुर्भुज बनाने को कहें, और फिर वे 2 या 3 के समूह में काम करते हुए इन चतुर्भुजों के अंतः कोणों को मापें। उन्हें प्रेरित करें कि वे दूसरे समूहों से भी चर्चा करें और अपने उत्तरों की तथा उनके उत्तरों की तुलना करें।

उनसे कहें/ पूछें :
अपनी कक्षा के अन्य विद्यार्थियों के साथ अपने चतुर्भुज की तुलना करें।

a. क्या वे सभी एक से दिखते हैं?
b. क्या आपको सभी तरह के चतुर्भुजों में अंतः कोणों के योग में कोई पैटर्न/नियमितता दिखाई देती है? अपने अवलोकन को एक अनुमान के रूप में लिखें।
c. क्या आपको लगता है कि यह व्यवस्था सभी चतुर्भुजों के लिए सही सिद्ध होगी?
d. क्यों होगा या क्यों नहीं होगा?

इस गतिविधि के अगले हिस्से में विद्यार्थियों से एक चतुर्भुज और उसका कोई एक विकर्ण बनाने को कहें। उनसे पूछें कि क्या वे इस चतुर्भुज के कोणों को मापे बगैर उसके अंतः कोणों का योग निकाल सकते हैं। यह समझने में विद्यार्थियों की मदद करें कि किसी चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है। त्रिभुज के अंतः कोणों के योग के गुणधर्म का उपयोग करते हुए चरणबद्ध ढंग से इस बात को सिद्ध करें कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360 डिग्री होता है। इसे सिद्ध करते वक्त विद्यार्थियों के विचारों को भी सुनें।

- विद्यार्थियों से पूछें कि क्या समानान्तर चतुर्भुजों पर भी यह गुणधर्म लागू होगा। अगर हाँ तो क्यों?
- उनसे पूछें कि क्या उनकी सोच में कोई ऐसा चतुर्भुज है जिसके अंतः कोणों का योग 360 डिग्री न होता हो?

(विद्यार्थी जिओज्रेबा का उपयोग करते हुए अपनी कम्प्यूटर प्रयोगशालाओं में निम्नलिखित गतिविधि करेंगे)

विद्यार्थियों से नीचे बताई गई भुजाओं की संख्या वाले बहुभुज बनाने को कहें। विद्यार्थी बहुभुज के आंतरिक कोणों को मापें और उनके योग को लिख लें। फिर वे बहुभुजों को एक दूसरे को न ढकने वाले त्रिभुजों में बांटें और हर बहुभुज में बने ऐसे त्रिभुजों की संख्या दर्ज करें और उसे नीचे दी गई तालिका में दर्ज करें :

| **नियमित बहुभुज में भुजाओं की संख्या** | **बहुभुज के अंतः कोणों का योग** | **बहुभुजों से बने, एक दूसरे को न ढांकने वाले त्रिभुजों की संख्या** | **एक दूसरे को न ढांकने वाले सभी त्रिभुजों में कोणों का योग** |
|---|---|---|---|
| 4 | 360 | 2 | 360 |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |

विद्यार्थियों से पूछें कि उन्होंने बहुभुजों के अंतः कोणों के योग में कौन सी व्यवस्था देखी। n भुजाओं वाले नियमित बहुभुजों के लिए कोई नियम बनाने में उनकी मदद करें।
विद्यार्थी यही काम अवतल/ उत्तल, सम/विषम बहुभुजों के साथ भी करें और इस तरह के बहुभुजों में भी कोणों के योग की व्यवस्थाओं का अवलोकन करें।
इन गतिविधियों के आधार पर, किसी बहुभुज के अंतः कोणों के योग के बारे में एक सामान्य नियम बनाने में विद्यार्थियों की मदद करें।

| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| किसी अवतल बहुभुज के शीर्षों को मिलाते समय एक बात ध्यान में रखना जरूरी है, कि बहुभुज के शीर्षों को एक से ज्यादा तरीकों से मिलाया जा सकता है। सिर्फ उन्हीं तरीकों को चुनें जो बहुभुज को, एक दूसरे को न ढांकने वाले त्रिभुजों में विभाजित करते हों। इन व्यवस्थाओं को देखकर सामान्य कथन और अनुमान तैयार करने में विद्यार्थियों की मदद करें। यह देखने के लिए कि वे लोग इसके बारे में क्या सोचते हैं, उनसे हमेशा अपने अनुमानों को सही सिद्ध करने के लिए कहें। |

# मेरे नोट्स

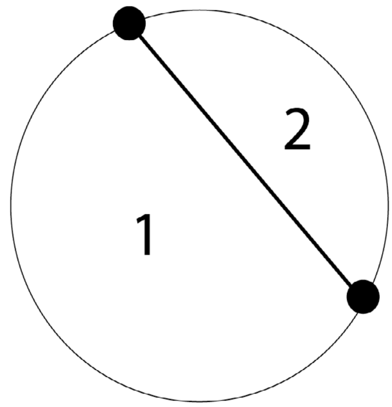
| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| क्या विद्यार्थी किसी पैटर्न के बारे में कोई सामान्य नियम बना पाए, और क्या वे चतुर्भुजों के कोणों के योग के बारे में अनुमान लगा सके? उनके अनुमान क्या थे? उन्होंने इन अनुमानों को किस तरह सही सिद्ध किया? | |
| क्या चतुर्भुजों के कोणों के योग के गुणधर्म का प्रमाण विद्यार्थियों के लिए विश्वसनीय था? क्या उन्हें यह विश्वास हो गया कि यह गुणधर्म सभी चतुर्भुजों पर लागू होगा? | |
| 'n' भुजाओं वाले सम बहुभुजों के अंतः कोणों के योग के बारे में विद्यार्थियों ने कौन सी पैटर्न देखी थी? क्या उन्हें यह एहसास हुआ कि यही नियम विषम बहुभुजों पर भी लागू किया जा सकता है? क्यों (विद्यार्थियों द्वारा दिए गए कारणों का उल्लेख करें)? | |
| विद्यार्थियों ने अवतल बहुभुजों के कोणों के योग में कौन सी व्यवस्थाएं देखीं? | |
| ऊपर उल्लिखित किसी भी कार्य में विद्यार्थियों द्वारा बनाई गई कुछ गलत पैटर्न/अनुमानों का भी उल्लेख करें। | |
| इस पाठ में विद्यार्थियों द्वारा किए गए जिओज़्रेबा उपकरण के उपयोग के बारे में अपने कुछ अवलोकनों का उल्लेख करें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| किसी चतुर्भुज के कोणों को मापते वक्त, क्या हर बार कोणों का योग ठीक 360 डिग्री रहा? कोणों का योग 360 डिग्री न होने पर क्या विद्यार्थियों ने आप से कोई सवाल किया? यदि हाँ, तो आपने उसका क्या जवाब दिया? | |
| आप क्या सोचते हैं कि अनुमान लगाने का यह अभ्यास किस प्रकार ऊपर उल्लिखित अवधारणाओं (बहुभुज के अंतः कोणों का योग) को बेहतर ढंग से सीखने में विद्यार्थियों की मदद करेगा? | |
| इन गतिविधियों को करते हुए क्या विद्यार्थी आपस में 'गणित' की चर्चा कर रहे थे? उनकी कुछ चर्चाओं को लिख लें। आप क्या समझते हैं कि विद्यार्थियों की इन आपसी चर्चाओं से आपको पढ़ाने में मदद मिलती है? आप इन चर्चाओं का इस्तेमाल अपने फायदे के लिए किस प्रकार करते हैं? | |
| आप क्या सोचते हैं कि इस तरह की गतिविधियों में जिओज़्रेबा का प्रयोग करना उपयोगी है? जिओज़्रेबा के उपयोग से जुड़े लाभों और समस्याओं की सूची बनाएं। | |

## अध्याय 2.3: प्रमाण की आवश्यकता

**कक्षा में चर्चाओं को सुगम बनाने की योजनाएं**

विद्यार्थी एक वृत्त बनाएं और उस पर दो सुस्पष्ट बिन्दु बनाएं और फिर इन बिन्दुओं को मिलाने से बने क्षेत्रों की संख्या पर ध्यान दें। फिर यही प्रक्रिया वे 3, 4, 5 बिन्दुओं के साथ दोहराएं।

| Number of points on circle | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Number of separate regions | | | | | |




विद्यार्थी हर बार बने पृथक क्षेत्रों की संख्या गिनें और देखें कि क्या उन्हें बिन्दुओं की संख्या और उनसे बन रहे पृथक क्षेत्रों की संख्या के बीच कोई खास व्यवस्था/ संबंध दिखाई देते हैं। उन्हें क्या लगता है कि यह नियम वृत्त पर बिन्दुओं की कितनी भी संख्या के लिए सही होगा। उनसे उनके जवाब के कारण पूछें। विद्यार्थियों से कहें कि वे वृत्त पर बिन्दुओं की अलग-अलग संख्या के साथ इसकी जाँच करें, और अपने अवलोकनों के आधार पर, अगर जरूरत पड़े, तो अपने पहले दिए गए उत्तर को बदल दें। आप विद्यार्थियों से निम्नलिखित सवाल पूछ सकते हैं :

- सामान्य नियम से वे क्या समझे?
- क्या किसी अनुमान को सिर्फ उदाहरण देकर सत्य सिद्ध किया जा सकता है? हमें कितने उदाहरण देना चाहिए? / किसी अनुमान को सत्य सिद्ध करने के लिए कितने उदाहरण काफी होते हैं?
- हम कैसे मान सकते हैं कि हमारे उदाहरणों के कोई विपरीत उदाहरण नहीं होंगे?
- हम किसी अनुमान को असत्य कैसे सिद्ध कर सकते हैं? इसके लिए हमें कितने विपरीत उदाहरणों की जरूरत होगी?
- आप उनसे यह भी पूछ सकते हैं कि उन्हें प्रमाण क्यों महत्वपूर्ण लगते हैं।

**स्मरणीय तथ्य**

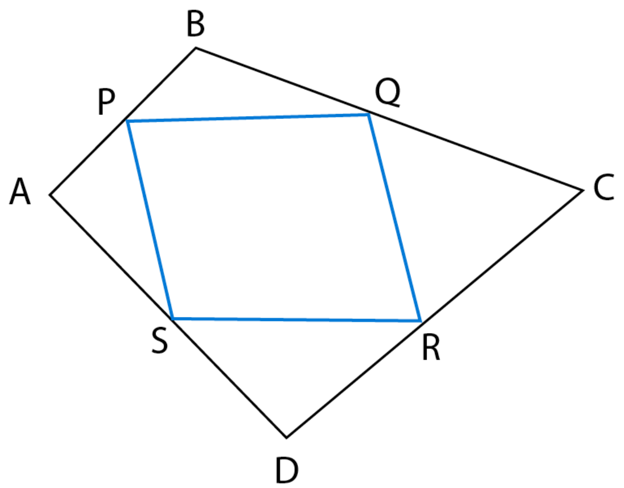
इस बात को समझने में विद्यार्थियों की मदद करें कि किसी अनुमान को सिर्फ उदाहरणों के आधार पर ही निर्णायक रूप से सत्य नहीं कहा जा सकता।

पहले कुछ उदाहरणों में, क्षेत्रों की संख्या $2^{n-1}$ है जहाँ n वृत्त पर बने बिन्दुओं की संख्या है। (इस बात से कोई दिक्कत नहीं है अगर विद्यार्थी चिन्हों वाले इस औपचारिक संकेतन के बजाय किसी व्यवस्था को व्यक्त करने के लिए भाषा का उपयोग करें और उसे 'नियम' की तरह व्यक्त करें)। लेकिन यह व्यवस्था n=6 पर आकर गलत सिद्ध हो जाती है जो यह दिखाता है कि उदाहरणों द्वारा लगाया गया अनुमान हमेशा सच हो ऐसा जरुरी नहीं है। इससे विद्यार्थियों को इस तथ्य को समझने में मदद मिलती है कि किसी अनुमान को कितने भी उदाहरणों द्वारा सही सिद्ध नहीं किया जा सकता – अपने अनुमान को सही सिद्ध करने के लिए उन्हें निगमनात्मक तर्क देना जरूरी है।

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| बिन्दुओं को मिलाने से बनी व्यवस्थाओं के बारे में विद्यार्थियों ने किस तरह के अनुमान लगाए? कम से कम दो अनुमानों को लिखें। | |
| कितने विद्यार्थी यह दिखाने में सफल रहे कि यह व्यवस्था n=6 (n वृत्त पर बिन्दुओं की संख्या है) पर आकर गलत सिद्ध हो जाती है? उन्होंने इसके पीछे क्या कारण बताए? कुछ कारणों की सूची बनाएं। | |
| क्या विद्यार्थी जाँच और प्रमाण के बीच के अंतर को समझ गए? कैसे? | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आपको क्या लगता है कि विद्यार्थी प्रमाण की जरूरत को समझ गए? इसे दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण दें। | |
| आपको क्या लगता है कि विद्यार्थियों के लिए प्रमाण की जरूरत को समझना क्यों जरूरी है? | |
| आपके विचार में, प्रमाण की जरूरत पर और अधिक जोर देने के लिए आप कौन सी अन्य गतिविधियां कर सकते हैं? | |
| आप इस पाठ को पाठ्यपुस्तकों में दिए गए औपचारिक प्रमाणों से किस प्रकार जोड़ेंगे? | |

## अध्याय 2.4: प्रमाण का लेखन

| कक्षा परिचर्चाएं आयोजित करने के उपाय |
| --- |
| प्रमाण को औपचारिक ढंग से लिखने के तरीके को समझने में विद्यार्थियों की मदद करें। विद्यार्थियों से यह सिद्ध करने को कहें कि नीचे दिए गए चित्र में PQRS एक समानान्तर चतुर्भुज है, जहाँ P, Q, R और S, चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB, BC, CD और DA के क्रमशः मध्य बिन्दु हैं :   विद्यार्थियों से अपने प्रमाण को समझाने, और कारण बताने को कहें। उनसे पूछें कि उन्होंने जो भी कथन किए हैं उनके बारे में वे आश्वस्त कैसे हैं, और उन्हें यह जानने में मदद करें कि सही सिद्ध हो चुके सभी कथनों की बुनियाद सूक्तियों और परिभाषाओं में होती है। |

| स्मरणीय तथ्य |
| --- |
| अपने कथनों और तर्कों के कारणों को व्यक्त करने में विद्यार्थियों की मदद करें। प्रमाण के तर्क को, और लिहाजा, गणित की निगमनात्मक प्रकृति को रेखांकित करें। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| विद्यार्थियों द्वारा नमूने के रूप में प्रस्तुत किए गए किसी एक प्रमाण को लिखें। | |
| विद्यार्थियों द्वारा कौन सी सामान्य गलतियां की गईं? कुछ को लिखें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| आप क्या समझते हैं कि विद्यार्थियों को अपने ही प्रमाणों को लिखने में कठिनाई क्यों होती है? | |
| क्या आपको लगा कि इस कार्यविधि से ज्यामिती को समझने में विद्यार्थियों को मदद मिली? समझाएं। | |

### अध्याय 2.5: सही और गलत सिद्ध करना

| कक्षा परिचर्चाऐ आयोजित करने के उपाय |
|---|
| विद्यार्थियों से समूहों में काम करने को, और यह पता लगाने को कहें, कि प्रस्तुत कथन सही हैं या गलत। उनसे समूहों में काम करते हुए, अपने उत्तरों को कक्षा के समक्ष प्रस्तुत करने को, और अपने उत्तरों को सही सिद्ध करने को कहें। विद्यार्थियों से पूछें कि<br>• वे कैसे इतने आश्वस्त हैं कि प्रस्तुत कथन सभी मामलों के लिए सही होगा? यानी वह सदैव सही ही होगा?<br>• उन्हें कैसे पता चलता है कि कोई कथन गलत है?<br>अगर किसी कथन विशेष को लेकर किन्हीं दो समूहों के बीच असहमति हो, तो उनसे आपस में बातचीत करके एक साझा निष्कर्ष निकालने को कहें। विद्यार्थियों/समूहों के बीच होने वाली चर्चाओं के आधार पर, और किसी कथन के सही होने के बारे में वे किस प्रकार दूसरों को विश्वास दिलाने की कोशिश करते हैं (क्या वे उदाहरणों का उपयोग करते हैं, या क्या वे तर्कों का उपयोग करते है), इसे देखते हुए आप समझ सकते हैं कि उन्होंने इस इकाई की अवधारणाओं को किस हद तक समझ लिया है।<br>आप दिए गए कथनों में कुछ नए कथन भी जोड़ सकते हैं। |

| स्मरणीय तथ्य |
|---|
| इस गतिविधि का उद्देश्य इस इकाई के केन्द्र में स्थित विचारों के बारे में विद्यार्थियों की समझ का एक अनौपचारिक आकलन करना है। इन विचारों को कुछ अलग संदर्भ में वे किस प्रकार लागू करते हैं इसे देखकर यह आकलन किया जाना है। |

# मेरे नोट्स

| छात्रों का प्रेक्षण | |
|---|---|
| क्या किसी कथन विशेष के 'सत्य' के बारे में किन्हीं दो समूहों/ विद्यार्थियों में कोई असहमति थी? वे उस असहमति को दूर करके किस प्रकार एक साझा निष्कर्ष पर पहुँचे? | |
| किसी कथन को 'सत्य' सिद्ध करने के लिए विद्यार्थियों द्वारा दिए गए तर्कों के कुछ उदाहरण दें। | |
| किसी कथन को 'असत्य' सिद्ध करने के लिए विद्यार्थियों द्वारा दिए गए तर्कों के कुछ उदाहरण दें। | |
| **आत्मचिंतन** | |
| क्या आपको लगता है कि यह गतिविधि विद्यार्थियों में निगमनात्मक तर्क करने की क्षमता विकसित करने में मदद करेगी? कैसे? | |
| इस कार्यविधि को पूरा करने के बाद क्या आपको लगता है कि विद्यार्थी ज्यामिती के सिद्धांतों को समझाने में, उन्हें सही सिद्ध करने में, उनके बारे में अनुमान लगाने में और उन्हें व्यक्त करने में सक्षम हो गए हैं? क्या आपको लगता है कि आपके शिक्षण में इससे मदद मिलेगी? | |
| क्या आप समझते हैं कि विद्यार्थी अपनी गलतियों से, और अन्य विद्यार्थियों की गलतियों से सीख रहे हैं? कुछ उदाहरण देकर समझाएं। | |

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# MY NOTES

# आनुपातिक तर्क

# सूची

**Attributions**
**क्लिक्स गणित**

**इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक सोच (कार्यपुस्तिका में शामिल नहीं है) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47**
पाठ 1.1: जामुनी ने सीखा साझा करना . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
पाठ 1.2: आइए तुलना करें और वितरण कर . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
पाठ 1.3: समूहों में हिस्सों को समान बनाना . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

**इकाई 2: गुणात्मक सोच . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56**
पाठ 2.1: ज़्यादा मीठी चाय . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
पाठ 2.2: जामुनी पहेलियाँ हल करती है . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60
पाठ 2.3: जामुनी बाज़ार जाती है . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
पाठ 2.4: साहिर एक पोस्टर बनाता है . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

**इकाई 3: अनुपात और समानुपात . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69**
पाठ 3.1: अनुपात संकेतन समझना . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
पाठ 3.2: जामुनी के साथ मानचित्र पढ़ना . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72
पाठ 3.3: पट्टियों का उपयोग कर लम्बाई ज्ञात करना . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
पाठ 3.4: नींबूपानी में बर्फ़ के क्यूब . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

**इकाई 4: अनुप्रयोग . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80**
पाठ 4.1: एकघात समीकरणों और प्रायिकता में समानुपात . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81
पाठ 4.2: मिश्र अनुपात और समानुपात . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83

# क्लिक्स गणित

## आनुपातिक तर्क

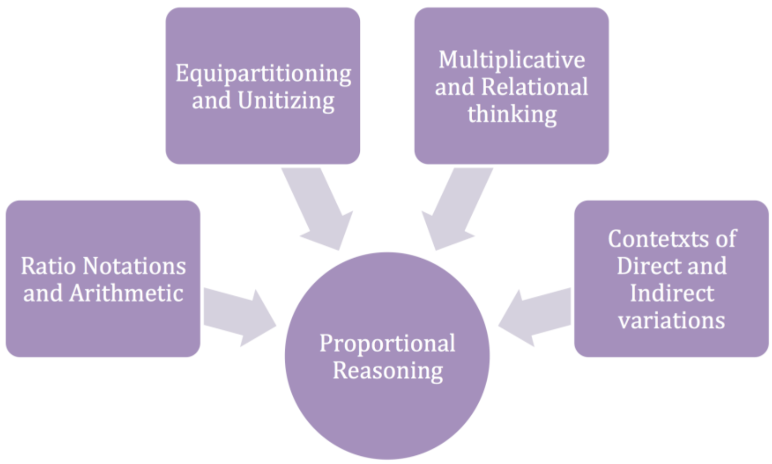
सबसे आसान तरीके से कहें तो आनुपातिक तर्क का मतलब गुणात्मक चिंतन का इस्तेमाल करते हुए दो चीजों में तुलना करने तथा इसके बाद उसे नए हालातों में अमल में लाने की काबिलियत है।
– नेशनल काउंसिल ऑफ टीचर्स ऑफ मैथमेटिक्स

आनुपातिक तर्क, स्कूली शिक्षा के दौरान शिक्षार्थियों में विकसित होने वाले महत्त्वपूर्ण गणितीय विचारों में से एक विचार है। यह परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़ी गुणात्मक अवधारणाओं के बारे में शिक्षार्थियों की समझ का एक अच्छा संकेतक है। साथ ही साथ, यह गणित की ज्यादा पेचीदा अवधारणाओं की नींव भी रखता है। आनुपातिक तर्क एक छतरीनुमा पद है, इसके दायरे में बहुत सारी अवधारणाओं से संबंधित चिंतन का तरीका आता है, जैसे, भिन्न से लेकर अनुपातों का बीजगणितीय प्रस्तुतीकरण, वेरियेशन और पैमानीकरण और प्रायिकता आदि। इस मार्गदर्शिका के संदर्भ में, आनुपातिक तर्क का मतलब है कि उपयुक्त हालातों में पैमाने को बढ़ा या घटा कर दर्शाने की काबिलियत तथा ऐसे संबंधों के लिए औचित्य उपलब्ध करवाना जिसमें सीधा यानी प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष वेरियेशन शामिल हों।

आनुपातिक तर्क पाठ्यचर्या के करीब करीब सभी क्षेत्रों में काम आता है और यह माध्यमिक गणित में कामयाबी के लिए एक महत्त्वपूर्ण अवधारणा मानी जाती है। लेकिन उनमें ऐसे मौके बहुत ही कम होते हैं, जहाँ पर शिक्षार्थियों के गुणात्मक तरीके से तर्क करने की काबिलियत विकसित करने के लिए, अनुपात तथा समानुपात के विचारों को सुसंगत तरीके से पाठ्यचर्या में गूंथा गया हो।

आनुपातिक तर्क पर क्लिक्स गणित का मोड्यूल इस पाठ्यचर्यात्मक खाई को पाटने की कोशिश करता है। इसमें सोच समझ कर गतिविधियों का इस्तेमाल किया गया है, जो कि या तो व्यावहारिक है या डिजिटली अंतर्क्रियात्मक है। इसमें आनुपातिक तर्क के विकास के अलग-अलग पड़ावों से गुजरना पड़ता है। इन पड़ावों को चार इकाइयों में व्यवस्थित किया गया है। यह मार्गदर्शिका इस बात को समझाती है कि शिक्षार्थियों में आनुपातिक तर्क विकास करने में, प्रत्येक इकाई व उसमें दिए गए पाठ किस तरह से मदद करते है। इसके साथ ही इनमें शिक्षार्थियों के सोचने के तरीकों के उदाहरणों पर भी चर्चा की गई है और इनमें से कुछ गतिविधियों पर संभावित गणितीय चर्चाओं को विस्तार से बताया गया है। ये उदाहरण डिजिटल तथा व्यावहारिक दोनों ही तरह की गतिविधियों के लिए दिए गए हैं, और अध्यापक इनका इस्तेमाल दोनों ही तरह की गतिविधियों में अपनी जरूरत के मुताबिक कर सकते हैं।

| आनुपातिक तर्क |
|---|
| अनुपात की संकेतन पद्धति (यानी नोटेशन) तथा अंकगणित |
| बराबर हिस्सेदारी तथा इकाईकरण |
| गुणात्मक तथा संबंधपरक चिंतन |
| प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष तबदीली के संदर्भ |



# उद्देश्य

आनुपातिक तर्क का मॉड्यूल शिक्षार्थियों के सीखने के तीन पहलुओं को संबोधित करता है।

- योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की तरफ बढ़ना : शिक्षार्थियों को योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर बढ़ाना एक ऐसी चुनौती है, जिसका सामना विद्यालयी शिक्षा को करना पड़ता है।
- बराबर हिस्सेदारी तथा इकाईकरण : संबंधपरक तथा गुणात्मक चिंतन को विकसित करने के लिए मूल कौशल के तौर पर इकाई के आकार तथा उपयुक्त तरीके से बराबर हिस्सेदारी की समझ
- अनुपात तथा समानुपात वाले हालातों पर जवाब देना : शिक्षार्थियों के परिचित हालातों पर काम करना, जिनमें शिक्षार्थी मात्राओं पर गुणात्मक नजरिए से विचार करना सीखें।
- प्रत्यक्ष तथा विपरीत अनुपातों के गणितीय तथा संदर्भगत समझ को विकसित करना : शिक्षार्थी आनुपातिकता के स्थिरांक का मतलब समझें तथा प्रत्यक्ष तथा विपरीत आनुपातिक हालातों का कार्य करें।
- आनुपातिक चिंतन को लागू करना : अनुपात की संकेतन पद्धति यानी नोटेशन का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थी प्रायिकता (प्रायिकता) तथा दूसरे गणितीय संदर्भों की समस्याएं हल कर पाएं।

**आनुपातिक तर्क के मॉड्यूल का ढांचा**

| | इकाई का नाम | विवरण | डिजिटल संसाधन |
|---|---|---|---|
| इकाई 1 | योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर | इस इकाई का उद्देश्य शिक्षार्थियों के साथ संबंधपरक हालातों पर, एक खास तरह से सोचने के तरीकों पर काम करना है और योगात्मक हालातों के साथ परिचय की वजह से उनके सामने पैदा होने वाली दुविधाओं को उजागर करना है। अक्सर, योगात्मक हालातों पर बहुत ज्यादा काम करने की वजह से, शिक्षार्थी सभी हालातों को योगात्मक तरीके से ही सुलझाते हैं यानी डिकोड करते हैं। इस इकाई में, शिक्षार्थियों का सामना ऐसे हालातों से होगा, जिनमें योगात्मक चिंतन उन्हें खाने के डिब्बों की असमान हिस्सेदारी/बंटवारे की तरफ धकेलेगा। शिक्षार्थी बराबर हिस्सेदारी जैसे विचारों के बारे में सीखेंगे, जिनमें वे उपयुक्त संख्या में टुकड़े करने या खाने के डिब्बों की इकाई के आकार का पता लगाएंगे ताकि प्रत्येक कर्मचारी को बराबर मात्रा में खाना मिल सके। जब शिक्षार्थी व्यक्तियों के बजाय समूहों में हिस्सों को बांटते हैं तब उन्हें गुणात्मक तौर पर समूह के हिस्से के बारे में सोचने की जरूरत पड़ती है। | इस इकाई में बराबर हिस्सेदारी/बंटवारे के लिए डिजिटल संसाधन दिए गए हैं। कटिंग टूल(cutting tool) यानी काटने का औजार शिक्षार्थियों में इस बात को बढ़ावा देते हैं कि वे एक पूरे के हिस्सों की संख्या के बारे में सोच सकें, और ग्रुपिंग टूल (grouping tool) यानी समूहीकरण का औजार समूहीकरण की कार्य-नीतियों को काम में लेने में मदद करता है। ये औजार भिन्नों के दृश्यात्मक चित्रों को उनके संख्यात्मक प्रारूप से जोड़ने का मौका उपलब्ध करवाते हैं। संदर्भ, प्रस्तुतीकरण तथा संख्याओं का चयन शिक्षार्थियों को इस नतीजे तक पहुंचाने के लिए किया गया है कि योगात्मक चिंतन सभी हालातों में काम नहीं करता और कुछ हालात आनुपातिक या गुणात्मक होते हैं। |
| इकाई 2 | गुणात्मक चिंतन | इस इकाई में, शिक्षार्थी ज्यामिति से जुड़े गुणात्मक हालातों पर काम करते हैं। वे पैटर्नों से जुड़े कामों पर काम करते हैं। वे पैटर्न पर काम करेंगे जिसमें वे पैटर्न का दृश्यात्मक प्रस्तुतीकरण एक समान रखते हुए पैमाने के आधार पर पैटर्न को बनाते हैं। यह इकाई शिक्षार्थियों के सामने दो आयामी संदर्भों में पैमाने के गुणक के विचार रखती है। वे आयताकार पैटर्न को बड़ा करते या सिकोड़ते हैं और उस पैटर्न में होने वाले संख्यात्मक बदलाव का पता लगाते हैं। | इस इकाई के डिजिटल संसाधन शिक्षार्थी को इस बात का मौका देते हैं कि वे पैटर्नों को पैमाने के आधार बनाएं व सिकोड़ें ताकि पैटर्न का दृश्यात्मक प्रस्तुतीकरण एक समान रहे। इन अभ्यासों पर किया जाने वाला तर्क बहुपरती होता है, इसलिए शिक्षार्थियों को पैटर्न में बिंदुओं की संख्या तथा पूरे पैटर्न पर एक साथ ध्यान देना पड़ता है। स्तम्भ तथा पंक्तियों को जोड़ने वाली डिजिटल इंटरफेस तथा बिंदुओं वाली पैलेट यानी पट्टी इस तर्क में मदद करती है। |

| | | | |
|---|---|---|---|
| इकाई 3 | अनुपात की संकेतन-पद्धति (यानी नोटेशन) | इस इकाई में शिक्षार्थियों की पिछली इकाइयों में बनी समझ को अनुपात की औपचारिक संकेतन-पद्धति के साथ जोड़ा गया है। अनुपात की संकेतन-पद्धति, भिन्नों की संकेतन-पद्धति वाला प्रारूप ही इस्तेमाल करते है और इसीलिए यह ज्यादा जरूरी हो जाता है कि अनुपात की संकेतन-पद्धति के प्रतीकात्मक जोड़-तोड़ पर काम करके उसकी अंकगणित को भिन्नों की अंकगणित से अलग किया जाए। | इस इकाई में, शिक्षार्थी एक डिजिटल कार्य करते हैं, जिसमें आयतन पर काम करना शामिल है। इसका उद्देश्य शिक्षार्थियों में अनुपात के स्थिरांक का विचार बनाने में मदद करना है। डिजिटल इंटरफेस शिक्षार्थियों को इस बात का मौका उपलब्ध करवाता है कि वे अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों को मिला कर अपना पेय पदार्थ को ठंडा बना सके। फिर से, चूंकि इस काम में बहुपरती तर्क करना शामिल है, इसलिए अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों के डिजिटल इंटरफेस तथा गिलास में भरे द्रव्य के आयतन के बदलाव में लचीलापन, पेचीदे तर्क को करने में शिक्षार्थियों की मदद करता है। |
| इकाई 4 | अनुप्रयोग यानी एप्लीकेशन | यह इकाई मध्यवर्ती इकाई की तरह काम करती है और यह वैकल्पिक है। इसका प्रमुख जोर आनुपातिक तर्क का गणित के दूसरे क्षेत्रों जैसे सरल रेखीय समीकरण, प्रायिकता, मिश्र अनुपात तथा रूपांतरण आदि में इस्तेमाल करना है। | इस इकाई में किसी भी तरह का डिजिटल संसाधन प्रयुक्त नहीं हुआ है। लेकिन यह मार्गदर्शिका, कक्षा में चर्चा तथा दूसरी गतिविधियों के लिए कुछ कार्यनीतियां उपलब्ध कराती है। |

## इस मार्गदर्शिका का इस्तेमाल करना

यह मार्गदर्शिका आनुपातिक तर्क के माड्यूल की चारों इकाइयों के प्रत्येक पाठ का संक्षेप में एक अवलोकन उपलब्ध करवाती है। मार्गदर्शिका के प्रत्येक भाग में मॉड्यूल के एक पाठ पर चर्चा की गई है और उस पाठ में से कुछ उदाहरण लेकर उन पर विस्तार से चर्चा की गई है। उन उदाहरणों के संदर्भ में शिक्षार्थियों की बहुत सारी कार्यनीतियों पर चर्चा की गई है। व्यावहारिक पाठों के लिए, अध्यापको को हैंडआउट पाठों को पहले से अच्छे से पढ़-समझ लेना चाहिए तथा शिक्षार्थियों के चिंतन के पूर्वानुमानों पर की गई चर्चाओं के आधार पर सामग्री तथा शिक्षाशास्त्रीय कार्यनीतियां भी तैयार कर लेनी चाहिए।

# इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर

## पाठ 1.1 : जामुनी ने सीखा साझा करना

### इकाई का अवलोकन (ओवरव्यू)

आनुपातिक तर्क यह जानने का एक बेहतरीन संकेत है कि शिक्षार्थी ने परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़े गुणात्मक संबंधों की समझ हासिल की है या नहीं। इसी के साथ-साथ, यह गणित के ज्यादा पेचीदी अवधारणाओं की बुनियाद भी रखता है। गुणात्मक चिंतन की प्रक्रियाएं ऐसे हालातों से संबंधित होती है जिनमें न्यायपूर्ण बंटवारा करना, पैमानीकरण, सिकोड़ना, नकल करना तथा घात के तौर पर बढ़ाना होता है। बराबर हिस्सेदारी तथा न्यायपूर्ण बंटवारे से संबंधित शिक्षार्थियों के विचारों को मजबूत करने से शुरुआत करते हुए यह इकाई ऐसे हालातों में गुणात्मक चिंतन को संबोधित करती है जिनमें भिन्न के ज्ञान की जरूरत पड़ती है। इसके साथ-साथ उदाहरणों का चयन भी इस तरह से किया गया है कि वे गुणात्मक तथा योगात्मक चिंतन के बीच के टकराव को आगे बढ़ाएं। इसलिए यह इकाई किसी भी तरह के गुणात्मक चिंतन को विकसित करने की नींव रखती है।

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

इस मॉड्यूल के पहले पाठ में, शिक्षार्थी क्षेत्रफल मॉडल में बराबर हिस्सेदारी के जरिए न्यायपूर्ण हिस्सेदारी/बंटवारे के विचार पर काम करेंगे। डिजिटल इकाई में शिक्षार्थी खाने के डिब्बे कर्मचारियों में इस तरह से बांटने में एक पात्र जमुनी की मदद करते हैं कि प्रत्येक को बराबर मात्रा में खाना मिले । आयताकार या गोलाकार खाने के डिब्बे शिक्षार्थियों को बराबर आकार के हिस्सों में काटने का मौका देते हैं। इसमें शिक्षार्थी खाने के डिब्बों को बराबर हिस्सों में बांटने के लिए, चित्र बना कर क्षेत्रफल को बांटना सीखेंगे। इसके बाद वे उन हालातों को पहचानना सीखेंगे जिनमें बराबर हिस्सों को दर्शाया जाता है। यह इकाई ऐसे हालातों को शिक्षार्थियों के सामने रखेगी, जिनमें अगर उन्होंने योगात्मक तरीके से तर्क किया तो वे गलत बंटवारा कर देंगे। इस तरह का अनुभव उनके लिए योगात्मक से आनुपातिक तर्क की तरफ बढ़ने में मील के पत्थर का काम करेगा।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे:

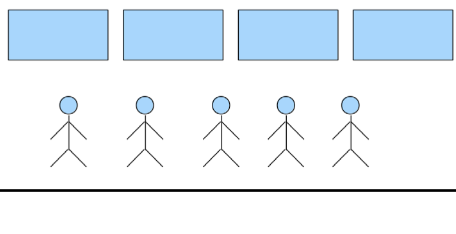
- समूहों के बीच में तथा समूहों कें अंदर दी गई मात्राओं में तुलना करके योगात्मक तथा गुणात्मक संबंधों में अंतर करना।
- एक समूह में प्रत्येक व्यक्ति के हिस्से के बारे में निर्णय करने के संदर्भ में प्रासंगिक मात्राओं के बीच गुणात्मक संबंधों की पहचान करना।
- किसी खास समूह के एक सदस्य के हिस्सें के साथ जोड़ते हुए बड़े अनुपात को पहचान कर, दो अलग-अलग हिस्सेदारी करने के हालातों में अनुपातों की तुलना करना।
- मात्राओं के बीच गणितीय संबंधों के आधार पर उनके घटने या बढ़ने के बारे में निर्णय लेना तथा उन निर्णयों के कारण बताना।

## इकाई का विवरण

| क्र. | पाठ का नाम | पाठ का प्रकार | पाठ का विवरण |
|---|---|---|---|
| 1.1 | जामुनी ने सीखा साझा करना | डिजिटल पाठ | शिक्षार्थी इस पाठ में न्यायपूर्ण तथा बराबर बंटवारे की अवधारणा समझेंगे। वे कटिंग टूल का इस्तेमाल यह पक्का करने के लिए करेंगे कि केक को अलग-अलग हिस्सों में कैसे काटा जा सकता है और उसे व्यक्तियों की समान संख्या में अलग-अलग तरीकों से कैसे बांटा जाता है?<br>इन समस्याओं में शिक्षार्थियों को कटे हुए टुकड़ों का संबंध भिन्नात्मक प्रस्तुतीकरण के साथ जोड़ना पड़ता है और एक व्यक्ति को मिलने वाला हिस्सा पहचानने के लिए उसे मिलने वाले सभी टुकड़ों को मिलाना पड़ता है। |
| 1.2 | तुलना करना तथा बाँटना | डिजिटल पाठ | इसमें शिक्षार्थी समूहों के बीच परांठे बांटने के लिए ग्रुपिंग टूल का इस्तेमाल करना सीखेंगे।<br>वे अपने भिन्नों के ज्ञान का इस्तेमाल करते हुए प्रत्येक व्यक्ति को मिले खाने के अनुपात की तुलना करेंगे।<br>इसमें शिक्षार्थी, खाने की सभी चीजों की हिस्सेदारी/बंटवारे के हालातों में बराबर अनुपात हासिल करने के लिए, मात्राओं तथा मात्राओं के बीच संबंधों के बारे में तर्क करेंगे। |
| 1.3 | समूहों के बीच में बराबर साझा करना | डिजिटल पाठ | इसमें शिक्षार्थी बराबर अनुपात के हालातों में कीमत का पता लगाना सीखेंगे। वे खाने को व्यक्तियों में बांटने के बजाय व्यक्तियों के समूह में बांटेंगे। यह काम एक बार फिर शिक्षार्थियों को गुणात्मक तर्क का इस्तेमाल करने का अवसर उपलब्ध करवाएगा। |

## गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्से में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय रास्ते (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग उपलब्ध करवाते हैं।

| **काम और गणितीय प्रासंगिकता** | **शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां** |
|---|---|
| **गतिविधि-1**: इस गतिविधि का मकसद शिक्षार्थियों को कटिंग टूल यानी काटने के औजार से परिचित करवाना तथा भिन्नात्मक मात्राओं का मतलब समझने में मदद करना है। यहां पर शिक्षार्थी तीन केकों को न्यायपूर्ण तरीके से काट कर चार बच्चों में बांटते हैं। कुछ खास शब्दावली जैसे, हिस्सा और न्यायपूर्ण हिस्सा आम बोलचाल में भी काम में लिया जाता है इसलिए इन पर खास तौर पर ध्यान देने की जरूरत है। न्यायपूर्ण हिस्सें का मतलब, आम बोलचाल में जरूरतमंद को ज्यादा आवंटन करना होता है। लेकिन, गणितीय तौर पर न्यायपूर्ण का मतलब प्रत्येक के एक समान मात्रा देना होता है। यहां पर गणितीय मतलब का इस्तेमाल किया गया है।<br>तोड़ना या समान हिस्सेदारी करना एक केन्द्रीय कौशल है जो गुणात्मक चिंतन की बुनियाद रखता है, और यही वजह है कि हमने यहां पर इस पर अपना ध्यान केन्द्रित किया है। इसीलिए, बराबर हिस्सें करते वक्त शिक्षार्थियों का ध्यान केक के आकार की तरफ दिलाया गया है। | शिक्षार्थी असली दुनिया में हिस्सेदारी/बंटवारे से परिचित होते हैं, और इसीलिए यह गतिविधि उन्हें इस बात का मौका उपलब्ध करवाती है कि वे गणितीय काम-काज करने के अपने तरीकों का मेल औपचारिक गणितीय अभ्यासों के साथ कर पाएं। शिक्षार्थियों के कुछ संभावित जवाबों के साथ किए जाने वाले शिक्षाशास्त्रीय काम नीचे सुझाए गए हैं।<br>अ. आधे या चौथाई की मदद से बांटना/हिस्सें करना : जब भी हिस्सेदारी का मामला हमारे सामने आता है हम किसी भी चीज के आधा या चौथाई करने के आदी होते हैं। शिक्षार्थी भी यही करेंगे। इसमें हमारे पास इन सवालों को पूछने का मौका होता है : उन्हें कुल कितने आधे या चौथाई मिले ? प्रत्येक बच्चे को न्यायपूर्ण बंटवारे/हिस्सेदारी के बाद कितने आधे या चौथाई मिले ? क्या आधे या चौथाई करना हमेशा एक अच्छी कार्यनीति होती है ? किन हालातों में आधे व चौथाई करना काम नहीं आयेगा ? अगर आप केक के छोटे या बड़े हिस्सें करते हैं तो प्रत्येक व्यक्ति के हिस्सें पर क्या असर पड़ेगा ?<br>b. असमान हिस्सेदारी : यह भी हो सकता है कि शिक्षार्थी किसी एक पूरे को प्रत्येक बच्चे में बांटना शुरू करें और अंत तक उन्हें असमान टुकड़ों में बांट दें। ऐसे मामलों में, अध्यापक उनके साथ इस बात पर चर्चा करें कि कटिंग टूल उन्हें क्या करने की इजाजत देता है। यहां पर इस बात की भी चर्चा करें कि, कैसे किसी एक पूरे के हिस्सों की इकाई का आकार छोटा करने पर, उसके कुल हिस्सों की संख्या बढ़ जाती है। किसी भी इकाई का छोटा आकार, कैसे किसी एक पूरे के, हिस्सों की संख्या बढ़ा देता है। |
| **गतिविधि-2**: इस गतिविधि का मक्सद शिक्षार्थियों को ग्रुपिंग टूल यानी समूहीकरण के औजार से परिचित करवाना है। इस काम में शिक्षार्थियों को पहले हिस्सें के आकार की कल्पना करनी है और फिर अपने जवाब को प्रमाणित करने के लिए हकीकत में समूहीकरण करके हिस्सें का पता लगाना है। | रोजमर्रा की जिंदगी में बराबर-हिस्सें का विचार समूहीकरण के साथ जुड़ा रहता है। व्यस्क के तैार पर, किसी चीज की एक इकाई की कीमत जानने से पहले हम एक आधे या एक चौथाई की कीमत का पता लगाने के आदी होते हैं। हम हमेशा एक हिस्सें की कीमत जानने की कोशिश नहीं करते बल्कि हिस्सों के समूह की कीमत का पता लगाने की कोशिश करते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम 12 अंडों की कीमत जानते हों और हमें 3 अंडों की कीमत का पता लगाना हो तो पहले हम 6 अंडे (कुल अंडों के आधे) की कीमत निकालते हैं, फिर उसका आधा करके 3 अंडों की कीमत का पता लगा लेते हैं। हालांकि, पाठ्यपुस्तकीय तौर तरीके हमेशा हमें यह सुझाते हैं कि पहले एक चीज की कीमत का पता लगाने के बाद कई सारी चीजों की कीमत निकालनी चाहिए। इस काम की बुनियाद ऐसे ही समूहीकरण के कौशलों पर रखी गई है। अध्यापक अपनी चर्चा को समतुल्यता बनाए रखने के इर्द गिर्द केन्द्रित रख सकते हैं। जब व्यक्ति दो समूह बनाते हैं, तब पूरे का आधा किया जाता है और प्रत्येक समूह के लिए लिया गया केक, पूरे समूह के लिए लिए गए केक का आधा होगा। |
| **गतिविधि-3**: चूंकि पिछली गतिविधियों में शिक्षार्थी कटिंग तथा ग्रुपिंग के औजारों का इस्तेमाल कर चुके हैं, इसलिए यह गतिविधि उससे एक कदम आगे बढ़ती है, जिसमें शिक्षार्थी केक को एक से ज्यादा तरीकों से काटते हैं तथा प्रत्येक व्यक्ति के हिस्सें को जोड़ना सीखते हैं। | इसमें काम में लिया गया तरीका गतिविधि-1 के तरीके जैसा ही है जिसमें हिस्सेदारी सरल भिन्न में नहीं है। हालांकि, चुनी हुई संख्याएं केक के संभावित वितरण की इजाजत देती है, और सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह है कि उसमें से किसी को भी आधे या चौथाई के हिस्सें करके नहीं हासिल किया जा सकता है। यह गतिविधि जानबूझ कर एक खास मक्सद से पहली गतिविधि से एकदम विपरीत बनाई गई है। अगर जरूरत हो तो, अध्यापक नीचे दिया गया रेखाचित्र बना सकते हैं और अलग-अलग इकाई के आकारों के आधार पर अलग-अलग तरह से हो सकने वाली हिस्सेदारी पर चर्चा कर सकते हैं।<br> |

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-4**: यह गतिविधि शिक्षार्थियों को अनुमान से अनुपात के विचार का इस्तेमाल करने का मौका देती है। उन्हें व्यक्तियों के समूह बनाने के लिए सुराग दिए जाते हें और इसके बाद वे दिए गए केकों को समूहों के बीच तथा उसके बाद समूह के सदस्यों के बीच बांटते हैं। संख्याओं को अलग से बाहर निकाल कर काम करने के बजाए शिक्षार्थी यह इसके बराबर या तुल्य है, के विचार पर काम करते हैं। | इस गतिविधि का मुख्य बिंदु असमान समूह बनाना तथा प्रत्येक समूह को दिए जाने वाले केक की संख्या का पता लगाना है ताकि प्रत्येक बच्चे को बराबर हिस्सा मिले। इसमे एक आम गलती यह होती है कि प्रत्येक समूह के सदस्यों की संख्या को ध्यान में लिए बगैर दो समूहों में बराबर केक बांट दिए जाते हैं। अध्यापक समूहों के अलग-अलग आकार पर जोर देते हुए, उन्हें मिलने वाले केक के अलग-अलग हिस्सों की तरफ ध्यान दिला सकते हैं। एक दूसरी समस्या जो सामने आती है वह यह है कि शिक्षार्थी 4 के समूहों के आकार में फर्क की तरफ ध्यान तो दे देते हैं लेकिन वे हिस्सों को तय करते वक्त योगात्मक तर्क करते हैं। एक संभावित गलत जवाब 2 व 6 बच्चों के लिए क्रमश: 4 तथा 8 केक हो सकता है। समूहों के आकार के बीच गुणात्मक संबंध का पता लगाने का सही तरीका यह है कि, 6 का समूह 2 के समूह की तुलना में 3 गुना है, इसका इस्तेमाल जवाब के हिस्सें का पता लगाने में किया जाए। (क्रमश: 3 केक तथा 9 केक). |
| **गतिविधि-5:** जैसे जैसे शिक्षार्थी डिजिटल संसाधन के सभी टूलों या औजारों से परिचित हो जाते हैं, यह गतिविधि उन्हें इस बात का मौका देती है कि वे खुद गुणात्मक ढांचे बनाने पर अपना ध्यान केन्द्रित कर सकें। | यह आकलन की गतिविधि है जिसमें रचनात्मकता की गुंजाइश है। मुमकिन है कि इसमें शिक्षार्थी पेचीदा बंटवारा प्रस्तावित करे, जैसे कि 10 बच्चों में 9 केक बांटना, तब इस गतिविधि को पूरा करने में काफी वक्त लग सकता है। कुछ प्रतिबंध लगाने के लिए, शिक्षार्थियों को पहले एक न्यायपूर्ण हिस्सेदारी/बंटवारे के लिए गुणात्मक हालात बनाने के लिए कहा जा सकता है, और उसके बाद उन्हें समूह बनाने तथा प्रत्येक समूह को मिलने वाले हिस्सें का पता लगाने का सुराग दिया जा सकता है। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

1. एक ऐसी कार्यनीति का पूर्वानुमान लगाइए, जिसे आपके शिक्षार्थी शायद आपकी कक्षा में गतिविधि-1 तथा 3 के लिए इस्तेमाल करें। ऐसे सवालों की सूची बनाइए जिन्हें आप उस कार्यनीति के बारे में पूछना चाहेंगे।

2. गतिविधि-4 के लिए, सभी संभावित बांटने के तरीकों (सही या गलत) का पता लगाइएं, जिन्हें शिक्षार्थी प्रत्येक समूह को केक बांटते वक्त काम में ले सकते हैं।

3. सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन कीजिए।
- इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
- उन तीन कार्यनीतियों(सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

# इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर

## पाठ 1.2: तुलना करना तथा बांटना

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)
इस पाठ में, शिक्षार्थी क्षेत्रफल मॉडल की मदद से बराबर हिस्सेदारी के जरिए न्यायपूर्ण बँटवारे के विचार पर काम करना जारी रखेंगे। वे कर्मचारियों के बीच खाने के डिब्बों को इस तरह से बाँटने में जमुनी की मदद करेंगे कि प्रत्येक को बराबर मात्रा में खाना मिल सके। गोल या आयताकार आकार के खाने के डिब्बे शिक्षार्थियों को उन्हें बराबर हिस्सों में बाँटने का मौका उपलब्ध करवाते हैं। शिक्षार्थी दृश्य का इस्तेमाल करते हुए, क्षेत्रफल को बांट कर खाने के डिब्बों को बराबर हिस्सों में बांटना सीखते हैं। इस पाठ में, जामुनी अपने अभिभावकों के कार्यस्थल पर जाती है और बराबर हिस्सेदारी से जुड़ी, खुद की समझ का इस्तेमाल खाने के डिब्बों को कर्मचारियों के बीच बाँटने में करती है। यहाँ पर जामुनी यह पहचान जाती है कि भवन निर्माता और कुछ दूसरे व्यक्ति योगात्मक तर्क का इस्तेमाल कर रहे हैं, जो कि गलत है। इसके बाद, शिक्षार्थी अनुपात व उनकी आपसी तुलना को समझने के लिए दो समूहों में काम करते हैं।

### सीखने के उद्देश्य
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,
- दी गई मात्रा को काटने के औजार(यानी कटिंग टूल) की मदद से समूहों में बाँटना।
- किसी खास समूह और उसके सदस्यों के साथ जुड़े हुए सबसे बड़े अनुपात को पहचान कर, हिस्सेदारी करने के दो अलग-अलग हालातों में अनुपातों की तुलना करना
- मात्राओं के बीच गणितीय संबंधों के आधार पर मात्रा में बढ़त या घटत के बारे में निर्णय लेना और उन निर्णयों के लिए तर्क देना।
- हमेशा योगात्मक ढंग से न समझ कर, जरूरत पड़ने पर हालातों को गुणात्मक ढंग से समझना

### गणितीय विचारों पर चर्चा
इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी रास्ता या ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

| काम और उसकी गणितीय प्रासंगिकता | शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां |
|---|---|
| **गतिविधि-1**: एक भवन निर्माता, व्यक्तियों तथा खाने के डिब्बों वाले इस सवाल में योगात्मक संबंधों का इस्तेमाल करता है और इस नतीजे पर पहुंचता है कि 5 व्यक्तियों में बाँटे गए 4 पराठे और 6 व्यक्तियों में बाँटे गए 5 पराठे, दोनों ही एक समान हालात होते हैं। चूंकि व्यक्तियों तथा चीजों की संख्या, दोनों ही मामलों में अंतर 1 का होता है, इसलिए यह एक आम तौर पर की जाने वाली गलती होती है। हमें यह याद रखना चाहिए कि दो मात्राओं में अंतर निकालना, उस हालात को योगात्मक नजरिए से देखने का तरीका है। इस पाठ में हमारा स्पष्ट रूप से लक्ष्य यह है कि शिक्षार्थियों को हालातों को गुणात्मक ढंग से समझने के लिए प्रशिक्षित किया जाए। | अ. एक परांठा कम : प्रत्येक समूह में, पराठों की संख्या उस समूह के सदस्यों की संख्या से सिर्फ एक कम है। योगात्मक तरीके से, ये दोनों हालात समकक्ष, यानी एक समान हैं, लेकिन इसका यह मतलब कतई नहीं है कि उस समूह के प्रत्येक कर्मचारी को पराठों का एक समान हिस्सा मिलेगा। चलिए हम मान लेते हैं कि दो समूहों में क्रमश: m और n व्यक्ति हैं।<br>अब उन व्यक्तियों में पराठे बांटने का मतलब यह है कि प्रत्येक को पूरे पराठे से थोड़ा सा कम मिलेगा, और यह जो प्रत्येक को थोड़ा सा कम कम पराठा मिला है, उन सभी को अगर मिला दें तो एक पूरा परांठा बन जाएगा। जब $m - 1$ पराठे को m व्यक्तियों के बीच बांटा जाता है तो प्रत्येक व्यक्ति को 1 पराठे से थोड़ा कम पराठा मिलता है, हम कह सकते हैं कि उसे $1/m$ पराठा कम मिलता है। इसी तरह से n व्यक्तियों के समूह में यही तर्क लागू होगा और प्रत्येक व्यक्ति को $1 - 1/n$ पराठा कम मिलेगा।<br><br>लेकिन, चूँकि $m \neq n$, $(1 - 1/m) \neq (1 - 1/n)$, इसलिए, भले ही योगात्मक तौर पर दोनों हालात समान प्रतीत हों लेकिन वे गुणात्मक तौर पर बराबर नहीं हैं और दोनों समूहों में से एक समूह में से प्रत्येक का हिस्सा दूसरे समूह के व्यक्तियों के हिस्सों के बराबर नहीं है। |

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-2**: यह गतिविधि भी पहली गतिविधि जैसी ही है और उसी तर्क पर आधारित है। इसमें पराठों की संख्या प्रत्येक समूह में कर्मचारियों की संख्या से 3 कम है। | एक बार फिर से, शिक्षार्थी दो हालातों के बीच असमानता का पता लगाने के दो तरीके हैं।<br>अ. हिस्सें का पता लगाना : काटने के औजार (यानी कटिंग टूल) की मदद से शिक्षार्थी प्रत्येक समूह के प्रत्येक कर्मचारी के हिस्सें का पता लगा सकते हैं। इसके बाद, मापने के औजार (यानी मेज़र टूल) से शिक्षार्थी यह पता लगा सकते हैं कि दोनों बराबर नहीं हैं।<br>काटने के अलग-अलग संभावित तरीकों में पराठों को यह जानने के लिए आधा या चौथाई करना शामिल है कि प्रत्येक को एक आधा मिलेगा और बाकी 4 आधे उनके बीच बाँटे जाने के लिए बचे रहेंगे(5 पूरे में 10 आधे) जबकि 6 व्यक्तियों के समूह में प्रत्येक व्यक्ति को सिर्फ एक आधा ही मिलेगा।<br>ब. अंतर को बाँटना : इस कार्यनीति को डिजिटल औजार से इस्तेमाल नहीं लिया जा सकता है लेकिन इसे सोचने में काम लिया जा सकता है। प्रत्येक हालात में, व्यक्तियों की संख्या सं 3 पराठे कम होंगे। यह बचे हुए तीन पराठे 8 व्यक्तियों और 6 व्यक्तियों पर अलग-अलग गुणात्मक असर डालेंगे, भले ही उनके बीच का योगात्मक असर समान हो । [गतिविधि 1 में की गई चर्चा को पढ़ें। ] |
| **गतिविधि-3**: यह दूसरे कामों की तुलना में सबसे सीधा सादा काम है। इसमें एक समूह में उसके सदस्यों की संख्या की तुलना में एक पराठा ज्यादा है तो दूसरे समूह में एक पराठा कम है। यह हालात योगात्मक तरीके से भी असमान है। गणितीय तौर पर, यह एक सीधी समझ है कि एक पूरे से थोड़ा सा ज्यादा एक पूरे से थोड़े से कम से हमेशा ही ज्यादा होगा। | हो सकता है कि शिक्षार्थी सिर्फ दोनों संख्याओं में 1 का अंतर देखें, लेकिन हमें उन्हें इस बात को समझने के लिए प्रशिक्षित करना है कि ये हालात गुणात्मक संदर्भ में असमान हैं। इसके लिए इस्तेमाल किए जाने वाले अलग-अलग सुराग कुछ इस तरह के हो सकते हैं :<br>i. पराठों की संख्या व्यक्तियों की संख्या से ज्यादा है। इस बात का क्या मतलब है ?<br>ii. पराठों की संख्या व्यक्तियों की संख्या से कम है। इस बात का क्या मतलब हो सकता है ?<br>iii. अंश के ज्यादा होने या हर के बड़े होने के संबंध में पहले से सीखे गए नियमों का हवाला दें। मात्राओं के संदर्भ में इसका हकीकत में क्या मतलब होता है ?<br>iv. क्या इसका मतलब यह होता है कि सभी साधारण भिन्न (जिसमें अंश हर से छोटा होता है) हमेशा एक पूरे से छोटा होता है ?<br>v. सबसे बड़े साधारण भिन्न का पता लगाएं। |
| **गतिविधि-4:** यह एक अकेली गतिविधि है जिसमें खाना बांटने के दो हालात योगात्मक तौर पर असमान नजर आते हैं लेकिन वे हालात गुणात्मक तौर पर बराबर हैं। | ऐसे शिक्षार्थी जो अभी भी इस हालात को योगात्मक तरीके से समझते हैं वे इसे असमान ही समझेंगे। हालांकि, चौथाई हिस्सें में बाँटने से वे इस बात को समझ पाते हैं कि प्रत्येक व्यक्ति का हिस्सा कितना है। शिक्षार्थियों को इन चीजों को बाँटने के तरीकों की सावधानीपूर्वक खोजबीन करनी पड़ेगी। जैसा कि गतिविधि 1 में दिखाया गया है कि शिक्षार्थी आधों से शुरू कर सकते हैं और उसके बाद चौथाई में बाँट सकते हैं। जैसे जैसे संख्याएं थोड़ी बड़ी होती जाएंगी, इस तरीके में ज्यादा वक्त लगने लगेगा। अध्यापक इस गतिविधि में समूहीकरण की कार्यनीति का इस्तेमाल करने पर चर्चा शुरू कर सकता है। 12 कर्मचारियों के लिए 9 पराठों को 4 व्यक्तियों के तीन समूह तथा प्रत्येक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है। इसी तरह, 8 व्यक्तियों के लिए 6 पराठों को 4-4 व्यक्तियों के 2 समूह तथा प्रत्येक समूह के लिए 3 पराठे के तौर पर समझा जा सकता है। |
| **गतिविधि-5**: यह इस पाठ का आकलन है, इससे हमें यह समझने में मदद मिलेगी कि शिक्षार्थियों ने इन गतिविधियों से कितना सीखा है? | शिक्षार्थियों को अपने आप काम करने दें। कक्षा में चारों तरफ घूमते हुए शिक्षार्थियों द्वारा अपनाई जा रही कार्यनीतियों पर नजर रखें। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- योगात्मक तथा गुणात्मक हालातों के बीच अंतरों के बारे में आप क्या समझते हैं, बताइये।
- क्या आप दो ऐसे हालातों के बारे में बता सकते हैं जो गुणात्मक तौर पर बराबर हों और योगात्मक तौर पर भी बराबर हों ? अपनी प्रकिया का वर्णन करें।
- भिन्न क्या हैं ? वे अनुपात के समान या उससे अलग कैसे होते हैं ?
- गतिविधि 1 और 2 के लिए शिक्षार्थियों द्वारा इस्तेमाल की जाने वाली कम से कम एक कार्यनीति बताईए। प्रत्येक कार्यनीति पर अपनी राय दीजिए।

# इकाई 1: योगात्मक से गुणात्मक चिंतन की ओर

## पाठ 1.3: समूहों के बीच बराबर हिस्सेदारी करना

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)
इस डिजिटल इकाई की डिजाइन इस तरह से की गई है कि इसमें शिक्षार्थी खाने के डिब्बों को कर्मचारियों के बीच बांटने में जामुनी की मदद करेंगे ताकि प्रत्येक व्यक्ति को खाने की बराबर मात्रा मिल सके। गोलाकार या आयताकार खाने के डिब्बे शिक्षार्थियों को इस बात के मौके देंगे कि वे उन्हें बराबर आकार में काट सकें। इस पाठ में, शिक्षार्थी गुणात्मक तौर पर समतुल्य हालातों को गढ़ने में जामुनी की मदद करेंगे। एक दृश्य के तौर पर समझें तो हम कह सकते हैं कि वे दिए गए डिब्बों के क्षेत्रफल को बराबर हिस्सों में बांटना सीखेंगे। पाठ 2 में वे यह सीखेंगे कि दो हालात समतुल्य यानी आपस में एक समान हैं या नहीं। यह पाठ इसी समझ पर आधारित है और अनुपात की समझ की दिशा में एक कदम और आगे बढ़ाता है।

### सीखने के उद्देश्य
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,
- समान अनुपात के हालातों में कीमतों का पता लगाना।
- समूहीकरण की कार्यनीति पर जोर देते हुए गुणात्मक तर्क को लागू करना।
- व्यक्तियों के हिस्सें पता करने के विचार को व्यक्तियों के समूहों के हिस्सें पता करने के विचार तक फैलाना।
- दिए गए हालातों में समान अनुपात में हिस्सें करने के लिए सवाल को डिजाइन करना।
- समान अनुपात के हालातों को गढ़ने के लिए सोचने के तरीकों का विकास।

### गणितीय विचारों पर चर्चा
इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी रास्ता या ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

| काम और गणितीय प्रासंगिकता | शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां |
|---|---|
| **गतिविधि-1**: जामुनी को 4 व्यक्तियों के बीच 3 पराठों का बराबर बंटवारा करना है और इसी के समतुल्य बंटवारा करके यह पता लगाना है कि 12 कर्मचारियों को कितने पराठे मिलेंगे। गणितीय तौर पर यह समस्या, आनुपातिक जोड़ों में चौथी अज्ञात राशि का पता लगाने जैसा ही है। यहां पर संदर्भ के साथ दिए गए उदाहरण इस बात को दर्शाते हैं कि इन आनुपातिक संख्याओं का हकीकत में क्या मतलब होता है। | हम समतुल्य हालातों का पता लगाने के लिए दो तरीकों से तर्क कर सकते हैं।<br>हिस्सेदारी करना : एक तरीका यह है कि एक व्यक्ति के हिस्सें पर तथा वह समतुल्य हालात में 3/4 कैसे बना रहता है, इस पर अपना ध्यान केन्द्रित किया जाए। इस मामले में शिक्षार्थियों को अपना ध्यान 3 और 4 के बीच गुणात्मक संबंधों पर केन्द्रित करना चाहिए और इन्हीं संबंधों को 12 व्यक्तियों के मामले में हासिल करना चाहिए। उदाहरण के लिए, 1 का एक चौथाई 4 होता है और यह तीन बार लिया जाता है; ऐसे ही 12 का एक चौथाई 3 है और इसे तीन बार लेने से हमें 9 मिल जाते हैं। इसीलिए, 12 व्यक्तियों के लिए 9 पराठा पहले हालात के समतुल्य हैं।<br>समूहीकरण : इस तरीके में, शिक्षार्थी 12 व्यक्तियों के समूह में 4 व्यक्तियों का समूह तलाशने की कोशिश करते हैं, और इसके बाद प्रत्येक समूह के लिए पराठों की उस संख्या का पता लगाने की कोशिश करते हैं जिससे प्रत्येक समूह के परिस्थितियाँ, 4 व्यक्तियों के लिए 3 पराठे वाले परिस्थितियों के समतुल्य हो जाएं।<br>टूल यानी औजार इस खास कार्यनीति को काम में लेता है। इस कार्यनीति का इस्तेमाल करते वक्त, नीचे दी गई बातों को ध्यान में रखना चाहिए।<br><br>जिन समूहों के लिए यह बंटवारा मुमकिन है :<br>समूहीकरण 1: 4, 4, 4<br>सही बंटवारा : इसमें 3 उप-समूह हैं और प्रत्येक में 4-4 कर्मचारी हैं। इनमें से प्रत्येक समूह का हिस्सा 3 पराठों के बराबर होना चाहिए।<br>समूहीकरण 2: 2, 4, 6<br>सही बंटवारा : इसमें 6, 4 और 2 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। इन समूहों का हिस्सा क्रमश: 4 1/2, 3 और 1 1/2 पराठा होना चाहिए।<br>समूहीकरण 3: 2, 2, 8<br>सही बंटवारा : इसमें 2, 2 और 8 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। इन समूहों का कुल हिस्सा क्रमश: 1 1/2, 1 1/2 और 6 पराठे होना चाहिए।<br>समूहीकरण 4: 4, 8<br>सही बंटवारा : इसमें 2 समूह हैं, 8 कर्मचारियों को 1 समूह तथा 4 कर्मचारियों को 1 समूह है। 8 कर्मचारियों के समूह को 6 पराठे तथा 4 कर्मचारियों के समूह को 3 पराठे मिलेंगे।<br>समूहीकरण 5: 6, 6<br>सही बंटवारा : 6-6 कर्मचारियों के 2 समूह हैं। प्रत्येक समूह को 4 1/2 या 4.5 पराठे मिलेंगे। |
| **गतिविधि-2**: यह समस्या गतिविधि-1 के समान ही है। समूह A में 2 पराठा तथा 4 कर्मचारी हैं। समूह B में 10 कर्मचारी हैं। गणितीय तौर पर, यह समस्या शिक्षार्थियों के सामने नई चुनौती पेश करती है, इसमें शिक्षार्थियों को 4 तथा 10 के बीच गुणात्मक संबंध का पता लगाना है। | समतुल्य हालातों का पता लगाने के लिए दो तरह से तर्क दिया जा सकता है।<br>हिस्सेदारी/बंटवारा: शिक्षार्थी देख सकते हैं कि पहले हालातों में 4 व्यक्तियों को 2 पराठे दिए गए हैं, और उसमें से प्रत्येक को 1/2 पराठा मिला है। 10 कर्मचारियों में से प्रत्येक को 1/2 पराठा देने के लिए उन्हें 5 पराठों की जरूरत पड़ेगी।<br>समूहीकरण: समूहीकरण में समतुल्य भिन्न बनाने के लिए अगर शिक्षार्थी 4 कर्मचारियों के समूह से शुरुआत करते हैं तो वे 4 कर्मचारियों के 2 समूह बनाएंगे और 2 कर्मचारियों का एक समूह बनेगा। कोई भी यह समझ सकता है कि दो कर्मचारियों के समूह को बाकी समूहों के समतुल्य बनाने के लिए उसे 4 कर्मचारियों के समूह को दिए गए पराठों के आधे पराठे ही देने होंगे। यह समस्या गुणात्मक चिंतन की खूबसूरती को दर्शाती है। जब 4 कर्मचारियों के प्रत्येक समूह को 2 पराठे मिलते हैं, तब 2 कर्मचारियों के एक समूह को 1 पराठा मिलता है, और सारे पराठे मिला कर 5 परांठे हो जाते हैं।<br><br>जिन समूहों में बंटवारा मुमकिन है, वे इस प्रकार हैं:<br>समूहीकरण 1: 8, 2<br>सही बंटवारा: 8 और 2 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। प्रत्येक समूह का हिस्सा क्रमश: 4 व 1 होना चाहिए।<br>समूहीकरण 2: 5, 5<br>सही बंटवारा: 5 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। प्रत्येक समूह को 21/2 या 2.5 पराठे मिलेंगे।<br>समूहीकरण 3: 3, 3, 4<br>सही बंटवारा: 3, 3 और 4 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। प्रत्येक समूह के हिस्सें में क्रमश: 11/2 या 1.5, 1.5 तथा 2 पराठा आएगा।<br>समूहीकरण 4: 2, 2, 6<br>सही बंटवारा: 2, 2 और 6 कर्मचारियों के 3 उप-समूह हैं। प्रत्येक समूह के हिस्सें में क्रमश: 1,1 और 3 पराठे आएंगे। |

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-3:** यहां पर 2 पराठे तथा 4 कर्मचारी हैं। समूह B में 9 कर्मचारी हैं। गणितीय तौर पर, यह गतिविधि वैसी ही है जैसी गतिविधि 1 है। | फिर से, समतुल्य हालातों के लिए दो तरीकों से तर्क किया जा सकता है।<br>हिस्सेदारी/बंटवारा: शिक्षार्थी देखते हैं कि पहले हालात में, 3 व्यक्तियों को 2 पराठे दिए जाते हैं, यानी कि प्रत्येक व्यक्ति को 1/3 पराठा दो बार मिलता है। 9 कर्मचारियों में से प्रत्येक को 1/2 परांठा दिया जाना है, तो उन्हें 9 बार 2/3 परांठा देने की जरूरत पड़ेगी। 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3 = 18/3, ये कुल मिला कर 6 पराठे हो जाएंगे।<br>समूहीकरण: शिक्षार्थी 9 कर्मचारियों में 3 के समूह बनाने की कोशिश करेंगे। 3 कर्मचारियों के 3-3 समूह बना लेने के बाद समतुल्यता को बरकरार रखने के लिए, अगर वे प्रत्येक समूह को 2 पराठे देते हैं तो उन्हें कुल मिला कर 6 पराठो की जरूरत पड़ेगी।.<br>टूल खास तौर पर इसी कार्यनीति को काम में लेता है। इस कार्यनीति का इस्तेमाल करते वक्त नीचे दी गई चीजों को ध्यान में रखें।<br><br>जिन समूहों में बंटवारा मुमकिन है, वे इस प्रकार हैं :<br>समूहीकरण 1: 3, 3, 3<br>सही बंटवारा: 3 उप-समूहों में, प्रत्येक में 3 कर्मचारी हैं। प्रत्येक समूह का हिस्सा 2 पराठों के बराबर होना चाहिए।<br>समूहीकरण 2: 6, 3<br>सही बंटवारा: 6 और 3 कर्मचारियों के 2 उप-समूह हैं। इन समूहों का कुल हिस्सा क्रमश: 4 पराठा और 2 पराठा होगा। |
| **गतिविधि-4:** यह सवाल इस पाठ के आकलन के लिए है। शिक्षार्थियों को इस सवाल को अपने आप करने के लिए पर्याप्त वक्त दें। | यहां पर यह उम्मीद की जाती है कि शिक्षार्थी या तो समूहीकरण का या फिर हिस्सेदारी/बंटवारा के तर्क का इस्तेमाल करेंगे और जरूरत पड़ी तो कागज कलम भी काम में लेंगे। उन्हें इस सवाल में टूल की मदद नहीं लेने दी जाएगी। यह जानबूझ कर किया गया है क्योंकि हम शिक्षार्थियों में सोचने के तरीकों का विकास करना चाहते हैं। हम यह नहीं चाहते कि वे सिर्फ डिजिटल टूल पर ही निर्भर हो जाएं। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- एक ऐसी कार्यनीति का पूर्वानुमान लगाइए जिसे आपके शिक्षार्थी शायद आपकी कक्षा में गतिविधि-4 के लिए इस्तेमाल करें। ऐसे सवालों की सूची बनाइए जिन्हें आप उस कार्यनीति के बारे में पूछना चाहेंगे।
- 
- गतिविधि-3 के लिए उन सभी संभावित समूहीकरणों(सही या गलत) का पता लगाइये, जिनका इस्तेमाल शिक्षार्थी प्रत्येक समूह को पराठा देते वक्त कर सकते हैं।
- 
- सभी गतिविधियों को पूरा कर लेने के बाद, नीचे दिए गए संकेतों पर दोबारा विचार करें।
- इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आने वाली तीन चुनौतियां लिखें।
- उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) को लिखें जिनकी आपने शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं की थी।
- 
- इस हालात को देखें : 8 व्यक्तियों में 6 पराठे बांटने हैं। इसके समतुल्य हालात का पता लगाइए जब व्यक्तियों की संख्या 18 हो। सभी संभावित समूहीकरण तथा प्रत्येक के लिए सही बंटवारे पर चर्चा करिए।

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# इकाई 2: गुणात्मक तर्क

**इकाई का अवलोकन (ओवरव्यू)**
इस इकाई में, शिक्षार्थी ऐसी गतिविधियों में शामिल होंगे, जो उनको तर्क करने तथा गुणात्मक तरीके से सोचने की तरफ बढ़ने को बढ़ावा दे। शिक्षार्थी हिस्सेदारी/बंटवारे तथा बराबर बंटवारे की अपनी समझ को गढ़ेंगे और समानुपात की शब्दावली में सोचना शुरू करेंगे। इस इकाई में व्यावहारिक के साथ साथ डिजिटल गतिविधियां भी होंगी। पैटर्न को दुबारा बनाने की डिजिटल गतिविधि शिक्षार्थियों की मदद करेगी कि वे अपनी सूझ बूझ का इस्तेमाल कर पाएं तथा उसे पैमाने की मदद से घटा या बढ़ा पाएं। एक डिजिटल गतिविधि में रोजाना की जिंदगी की कुछ परिस्थितियों के जरिए शिक्षार्थी की रोजमर्रा के हालातों में आनुपातिक तर्क की प्रासंगिकता का पता लगाने में मदद करेगी। मिश्रित काम आनुपातिक तर्क के केन्द्र में रहते हैं। इस इकाई में, हम उनमें से कुछ पर और उनके बारे में शिक्षार्थियों की तर्क पर काम करेंगे। व्यावहारिक गतिविधियां, जैसे नक्शा बनाना शिक्षार्थियों को अनुपातों के अनुप्रयोगों यानी एप्लीकेशनों(Applications) के बारे में जागरूक करता है और प्रकरण की प्रासंगिकता को रेखांकित करता है। व्यावहारिक गतिविधियां, शिक्षार्थियों को इस बात के मौके देती है कि वे अपने कामों को करते वक्त ठोस चीजों का इस्तेमाल कर सकें। शिक्षार्थियों को कई संदर्भ में तथा अलग अलग प्रकार के कामों को करते वक्त गुणात्मक चिंतन के विचार की छानबीन करने का मौका मिलेगा।

**पाठ का विवरण**

| क्र | अध्याय का नाम | पाठ का प्रकार | पाठ का वर्णन |
|---|---|---|---|
| 2.1 | ज़्यादा मीठी चाय | व्यावहारिक गतिविधियां | इस पाठ में असमान मात्राओं का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थियों को गुणात्मक चिंतन से परिचित कराया जाएगा। शिक्षार्थी अनुपातों में बराबरी को बरकरार रखते हुए समूहीकरण की कई कार्यनीतियों को काम में लेंगे। यहां पर, समान मात्राएं असमान प्रारूप में हैं, जिससे शिक्षार्थियों को समान व असमान मात्राओं में लचीले तर्क को विकसित करने का मौका मिलता है।<br>एक गतिविधि में बराबर अनुपातों को बरकरार रखते हुए गणना करने के लिए एक संदर्भ इस्तेमाल किया गया है, और उसी संदर्भ को दूसरी गतिविधि में एक से ज्यादा अनुपातों से जुड़े तर्क में इस्तेमाल किया गया है। |
| 2.2 | जामुनी ने हल की पहेली | डिजिटल | इस डिजिटल पाठ में शिक्षार्थियों को ऐसे काम से परिचित करवाया जाएगा जिनमें पैमाने के गुणक का पता लगाने के साथ-साथ पैमाना बढ़ाना या घटाना भी शामिल है। यह गतिविधि मूल तथा पैमाने के आधार पर घटाए या बढ़ाए गए पैटर्नों की इकाइयों में होने वाले बदलावों पर शिक्षार्थियों को सोचने के लिए बढ़ावा देगी। इस डिजिटल पाठ में पैटर्न टूल को काम में लिया गया है। यह टूल शिक्षार्थियों की, पैटर्नों को पैमाने के आधार पर इस तरह से बढ़ाने व सिकोड़ने में मदद करेगा कि उनकी तस्वीर पहले जैसी ही दिखाई देती रहे। |
| 2.3 | जामुनी गई बाजार | डिजिटल | इस पाठ में दी गई गतिविधियां गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों को इस्तेमाल करने में शिक्षार्थियों की मदद करेगी। इसमें समान मात्राओं का इस्तेमाल किया गया है लेकिन उन्हें असमान भी किया जा सकता है तथा शिक्षार्थी पैमाने वाले तथा वेक्टर वाले दोनों ही अनुपात काम में ले सकते हैं। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को गुणात्मक चिंतन करने का मौका देगी तथा मात्राओं के साथ आनुपातिक संबंधों का इस्तेमाल करने का मौका देगी। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को इस बात का भी मौका देगी कि वे समान मात्राओं की तुलना करने के लिए आनुपातिक चिंतन में अलग-अलग तरह की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करें। खरीदारी वाली समस्याएं शिक्षार्थी की अपनी रोजमर्रा की जिंदगी से जुड़ती है। ज्यामितीय आकारों की अवधारणाओं के साथ काम लेने से शिक्षार्थियों की आनुपातिक समझ और मजबूत होती है। यह ज्यामितीय आकृतियों की लंबाई तथा चौड़ाई के संदर्भ में 'आंतरिक' तथा 'बाहरी' अनुपात के बारे में सोचने में शिक्षार्थियों की मदद करती है। |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.4 | साहिर ने बनाया पोस्टर | व्यावहारिक गतिविधियां | इस पाठ में, शिक्षार्थी समान मात्राओं का इस्तेमाल करते हुए गुणात्मक तर्क करना सीखेंगे। शिक्षार्थी गुणात्मक चिंतन तथा अनुपात-समानुपात के व्यावहारिक इस्तेमाल के साथ भी इसे जोड़ कर देखेंगे। |

## पाठ 2.1: ज़्यादा मीठी चाय

### पाठ का ओवरव्यू

इस पाठ में, शिक्षार्थी गुणात्मक चिंतन की कई तरह की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करना सीखेंगे। समूहीकरण तथा अनुपात का पता लगाना व उनकी आपस में तुलना करना इस पाठ की महत्त्वपूर्ण अवधारणाएं हैं।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- अनुपात की बराबरी को बरकरार रखने के लिए समूहीकरण की अलग-अलग तरह की कार्यनीतियां विकसित करना।
- समूहीकरण की कई तरह की कार्यनीतियां विकसित करना।
- समान मात्राओं को असमान मात्राओं में बदल कर जोड़-तोड़ करना।
- समान तथा असमान मात्राओं में लचीले तरीके से तर्क करने की काबिलियत को विकसित करना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

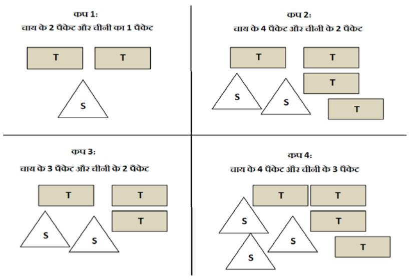
इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

यह पाठ समान मात्रा का इस्तेमाल करते हुए गुणात्मक चिंतन से शिक्षार्थियों का परिचय करवाता है। शिक्षार्थी अनुपात की बराबरी बनाए रखने के लिए समूहीकरण की कई तरह की  कार्यनीतियां विकसित करेंगे। यहां पर समान मात्राएं जैसे चीनी तथा चाय के साथ असमान तौर पर जोड़ तोड़ करते हैं जिससे शिक्षर्थियों को समान तथा असमान मात्राओं के साथ लचीले ढंग से तर्क करने का मौका मिलता है

चीनी तथा चाय को दर्शाने के लिए दो अलग-अलग तरह के आकृतियों के सेट बना लें। चाय को दर्शाने के लिए आयत तथा चीनी को दर्शाने के लिए त्रिभुज तय कर लें। आप स्क्रीन पर दिखाई देने वाली आकृति जैसी तस्वीर बोर्ड पर बना सकते हैं जिसमें प्रत्येक संख्या एक कप चाय को दर्शाएगी। शिक्षार्थी बोर्ड पर दिखाए अनुसार कार्ड अपनी मेज पर जमाएंगे। इसके बाद आप सवाल पूछ सकते हैं और शिक्षार्थियों को इस बात का मौका दें कि वे अपने समूह के साथियों के साथ मिल कर जवाब खोजें।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>

**गतिविधि-1**: इस गतिविधि में, शिक्षार्थी एकसमान मिश्रण के नजरिए से अनुपात के विचारों पर काम करते हैं। आनुपातिक हालातों को बनाने या पहचानने के लिए समूहीकरण की अलग-अलग कार्यनीतियों के इस्तेमाल को आसानी से समझने के लिए चाय में चीनी मिलाने जैसे रोजमर्रा की जिंदगी के एक काम का प्रयोग किया गया है।<br>
कप-1 : चाय की 2 पैकेट और चीनी की 1 पैकेट<br>
कप-2 : चाय की 4 पैकेट और चीनी की 2 पैकेट<br>
कप-3 : चाय की 3 पैकेट और चीनी की 2 पैकेट<br>
कप-4 : चाय की 4 पैकेट और चीनी की 3 पैकेट




</td><td>

इस काम में शिक्षार्थियों को प्रत्येक चाय के कप का सावधानीपूर्वक अध्ययन करना है और यह पता लगाना है कि चार कपों में किस कप में सबसे ज्यादा चीनी है। शिक्षार्थी आयतों तथा त्रिभुजों का इस्तेमाल करते हुए अपनी मेजों पर नीचे दिए गए संयोजन बनाएंगे।

किस चाय में चीनी ज्यादा है, यह जानने के लिए शिक्षार्थी प्रत्येक कप के लिए बनाए गए संयोजन को देखेंगे। उदाहरण के लिए, वे चीनी की एक पैकेट की चाय की दो पैकेटओं के साथ जोड़ी बना सकते हैं और इस पैटर्न की तुलना दूसरे कपों के साथ कर सकते हैं। शिक्षार्थियों को अपने आप छानबीन करने दें। जब वे इस सवाल पर काम कर रहे हों तब आप उनकी कार्यनीतियों को दर्ज करने की कोशिश करें।

अगर शिक्षार्थियों को आगे बढ़ना मुश्किल लग रहा हो तो इस बात की तरफ उनका ध्यान दिलाए कि कप-1 और कप-2 में बराबर चीनी है क्योंकि दोनों ही कपों में चीनी की 1 पैकेट के साथ चाय की 2 पैकेट काम में ली गई है।

कप-3 में, चीनी की 2 पैकेट के साथ चाय की 3 पैकेट काम में ली गई है। जब इसकी तुलना कप-4 के साथ करते हैं, तो हम पाते हैं कि चाय की 3 पैकेट के साथ चीनी की 2 थैलियां मिलाई गई हैं, और बाकी बची चाय की 1 पैकेट के लिए चीनी की 1 पैकेट है। इसलिए कप-3 की तुलना में कप-4 में ज्यादा चीनी है। अब शिक्षार्थियों से कहें कि वे इसी तरह से कप-3 तथा कप-1 (या कप-2) की तुलना करें। शिक्षार्थियों से कहें कि वे अपनी कार्यनीतियों को अपने सहपाठियों के साथ साझा करें।

</td></tr>
<tr><td>

**गतिविधि-2:** यह गतिविधि पिछली गतिविधि का ही विस्तार है, जिसमें शिक्षार्थियों को एक कप चाय के लिए एक अनुपात दिया गया था और उनसे कहा गया था कि वे उसके समतुल्य कोई हालात बनाएं। ये सभी हालात समानुपात की अज्ञात राशि वाली समस्याओं को दर्शाते हैं, जो कि आम तौर पर पाठ्यपुस्तकों में पूरी तरह से संख्यात्मक तथा अमूर्त ढंग से दी जाती है।

</td><td>

शिक्षार्थियों को चाय की 6 पैकेट दी गई। उन्हें एक कप चाय बनाने के लिए चीनी की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी, अगर उनके कप की चाय नीचे दिए कप के समान हों :

- गतिविधि-1 में दिया गया कप-3
- गतिविधि-1 में दिया गया कप-4

इस समस्या को समझ कर हल करने के दो तरीके हैं।<br>
बाहरी अनुपात : समान अनुपात में मात्राएं बनाने के लिए राशियों का एक समूह दिया गया है। उदाहरण के लिए, कप-3 में चाय की 3 पैकेट के लिए चीनी की 2 थैलियां है। चाय की 6 पैकेट से इसके समतुल्य चाय बनाने के लिए शिक्षार्थियों को यह समझने की जरूरत है कि कप-3 में अनुपात 3:2 है और उन्हें अनुपात में समतुल्यता बरकरार रखने के लिए ?:2 का पता लगाना है। इसे बाहरी अनुपात कहा जाता है। फिर से, चूँकि अनुपात एक गुणात्मक अवधारणा है इसलिए हमें 6 और 3 के बीच में संबंध नहीं देखना है कि 6,3 से 3 ज्यादा है। बल्कि 6 को 3 के दुगुने के तौर पर देखना है। इसलिए स्वाद में समतुल्यता बरकरार रखने के लिए हमें चीनी की दुगुनी यानी 4 थैलियों की जरूरत पड़ती है।<br>
आंतरिक अनुपात : इस समस्या को एक दूसरे तरीके से समझने का तरीका यह है कि इसमें यह पूछा जाए कि दी गई चाय की पुड़ियों के लिए चीनी की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी। कप-3 में चाय की 3 पैकेट के लिए चीनी की 2 थैलियां है। अब चाय की 6 पुड़ियों के लिए हमें 2:3 के अनुपात में हमें चीनी की थैलियां तथा चाय की पैकेट चाहिए। फिर से, शिक्षार्थियों को 2 व 3 के बीच के संबंध को गुणात्मक तौर पर देखना चाहिए। हम जानते हैं कि 2 पैकेट, 3 पैकेट की 2/3 होती है, इसलिए स्वाद में समतुल्यता लाने के लिए हमें 6 पैकेट के 2/3 की जरूरत पड़ेगी और उसमें 4 चीनी की थैलियां लेनी पड़ेंगी।

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| गतिविधि-3: यह गतिविधि पिछली गतिविधि से ज्यादा पेचीदी है। इसमें चाय की पैकेट तथा चीनी की पैकेट, दोनों की संख्या सीमित कर दी गई है और पहले जहां एक कप चाय ही बनानी थी, इसमें उसी स्वाद वाली चाय के 4 कप बनाने हैं। इस का उद्देश्य समान अनुपात के साथ साथ पैमाने की मदद से बढ़ाने के विचार की जडें मजबूत करना है। | शिक्षार्थियों को चाय की 15 पैकेट दी गई और चीनी की 11 थैलियां दी गईं और उन्हें कहा गया कि वे 4 कप चाय बनाएं, उसमें चीनी की मात्रा उतनी ही होनी चाहिए जितनी कि पहली गतिविधि के कप-4 में एक कप में थी। वे गतिविधि-2 में दिए गए तरीके से आंतरिक या बाहरी अनुपात का पता लगा सकते हैं।<br>यहां पर अध्यापक इस बात को पक्का करने के लिए, कि शिक्षार्थी काम तथा समतुल्य अनुपात को समझ पा रहे हैं, नीचे दिए गए सवाल पूछ सकते हैं।<br>• कप-4 में चाय की पैकेट के साथ चीनी का अनुपात क्या है ?<br>• कप-4 के समतुल्य स्वाद वाली चाय बनाने चाय की कितनी पुड़ियों तथा चीनी की कितनी थैलियों की जरूरत पड़ेगी ? |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- अपनी कक्षा में आज हुई दो अलग-अलग चर्चाओं का वर्णन कीजिए।
- आपने इन्हीं दो को क्यों चुना ?
- इन चर्चाओं की गणितीय अहमियत क्या है ?
- इन घटनाओं के सामाजिक पहलू क्या हैं ?
- गतिविधि-1 में, ज्यादा चीनी वाली चाय बनाने के लिए जिन तरीकों का इस्तेमाल किया गया, उनमें से कुछ तरीकों को लिखिए ?
- गतिविधि-3 में जवाब का पता लगाने के कम से कम दो तरीके बताइए। किसी एक संभावित गलत जवाब का अनुमान लगाइए और उसके पीछे का तर्क समझाइए।
- क्या आपने शिक्षार्थियों के सोचने के तरीके में किसी तरह के पैटर्न का दोहराव पाया? संक्षेप में लिखिए।
- आनुपातिक तर्क से आप क्या समझते हैं, अपने शब्दों में लिखिए। यह भी समझाइए कि चाय-चीनी के काम ने, आनुपातिक तर्क को विकसित करने में कैसे मदद की।
- ऐसे कई तरीके हैं जिनका इस्तेमाल करके शिक्षार्थी इन समस्याओं पर काम कर सकते हैं। हमने देखा कि उन्होंने ग्रुपिंग टूल का इस्तेमाल कैसे किया। इसी तरह वे मात्राओं का समूह बना सकते हैं। चाय-चीनी की ऐसी एक समस्या बनाइए जिसमें इनमें से कुछ कार्यनीतियों को इस्तेमाल करने का मौका मिले।

# इकाई 2: गुणात्मक तर्क

## पाठ 2.2: जामुनी ने हल की पहेली

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

पैमाने की मदद से घटाने और बढ़ाने का कौशल आनुपातिक तर्क की जान है। इस पाठ में, हम अपना ध्यान इस कौशल पर केन्द्रित करते है तथा इस कौशल के संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण को मजबूत करते हैं। इस पाठ की गतिविधियां दिए गए पैटर्न को पैमाने के आधार पर घटा या बढ़ा कर गुणात्मक चिंतन करने में शिक्षार्थियों की मदद करती है। इस पाठ में दो तरह की गतिविधियां हैं। पहली तरह की गतिविधी में, दिए गए पैटर्न की बाहरी किनारी को पैमाने के आधार पर घटाना या बढ़ाना है और शिक्षार्थियों को उस पैटर्न को दोबारा बनाने के लिए पैमाने के गुणक का पता लगाना है। दूसरी तरह की गतिविधियों में, पैमाने का गुणक दिया हुआ है और शिक्षार्थियों को उस गुणक के आधार दिए गए पैटर्न को बढ़ाना या घटाना है। शिक्षार्थियों को मूल तथा नए बनाए गए पैटर्न के बीच संबंधों के बारे में सोचने के लिए कहा जाएगा। इस काम के लिए बनाया गया डिजिटल औजार आनुपातिक तरीके से सोचने के लिए दृश्य तथा शब्दों के जरिए अर्थ आधारित मदद करता है।

**सीखने के उद्देश्य**
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- द्वि आयामी पैटर्न को आनुपातिक ढंग से पैमाने के आधार पर घटाने या बढ़ाने के लिए गुणात्मक चिंतन का इस्तेमाल करना।
- पैमाने के आधार पर पैटर्न को घटाने व बढ़ाने को इस्तेमाल करना तथा समझाना। ऐसा करते वक्त इस बात का ध्यान रखना कि पैटर्न का आकार पहले जैसा ही दिखाई देता रहे।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>पहले प्रकार का काम : पैमाने के आधार पर बढ़ाए या घटाए गए पैटर्न के जाल की किनारी नीचे दी गई है तथा शिक्षार्थियों से कहा गया कि वे जाल में दिए गए पैटर्न को दोबारा बनाने के बाद पैमाने के गुणक का पता लगाएं।<br><table><tr><td>G</td><td>G</td><td>G</td></tr><tr><td>G</td><td>R</td><td>G</td></tr><tr><td>G</td><td>G</td><td>R</td></tr></table>एक 9 x 9 का बाहरी जाल दिया गया है। जाल को भरते वक्त शिक्षार्थियों को अवलोकन करने को कहें। उनके साथ बातचीत करें: नया पैटर्न मूल पैटर्न से कितना गुना बड़ा होता है ?</td><td>नए पैटर्न को पैमाने की मदद से 3 के गुणक में बढ़ाया गया। आप शिक्षार्थियों से नीचे दिए गए सवाल पूछ सकते हैं :<br>• मूल पैटर्न में टाइलों की कुल संख्या कितनी है ?<br>• नए पैटर्न में कितनी टाइलें हैं?<br>• पैटर्न को 3 के गुणक में बढ़ाने पर नए पैटर्न में 81 टाइलें क्यों हो जाती है (जबकि मूल पैटर्न में 9 टाइलें थी)?<br><br>जब हमने इस गतिविधि को शिक्षार्थियों के साथ करके देखा तो हमने कुछ चीजों सीखीं, जिन्हें आपकी मदद के लिए नीचे दिया गया है।<br>• जब हम यह दिखने में एक समान पैटर्न की बात करते हैं तब हमें इस बात पर चर्चा करनी चाहिए कि इसका क्या मतलब होता है। इसका मतलब होता है कि जब हम किसी पैटर्न को एक अनुपात में बढ़ाते या घटाते हैं तब उसकी डिजाइन बरकरार रहनी चाहिए।<br>- यहां पर दो आयामी आकृतियां इस्तेमाल की गई हैं, और जब हम कहते हैं कि इस पैटर्न को 3 के गुणक में पैमाने पर बढ़ाया जाए, तो इसका मतलब यह होता है कि इसे दोनों आयामों में उस गुणक की मदद से बढ़ाया या घटाया जाए। इसलिए इस पैटर्न में टाइलों की संख्या 9 गुना बढ़ जाती है।</td></tr>
</table>

दूसरे प्रकार के काम : इन कामों में, मूल पैटर्न को जिस पैमाने पर बढ़ाना है, उसका गुणक दिया है। नए पैटर्न के जाल की किनारी नहीं दी गई है। शिक्षार्थी नया पैटर्न बनाएं तथा कुछ सवालों पर सोचें।

इस प्रकार की गतिविधि का एक उदाहरण : दिए गए पैटर्न को 2 के गुणक में पैमाने पर कम करें तथा जाल में हरी तथा लाल टाइलें भरें।

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | | R | | | | | |
| R | | R | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| R | | R | | | | | |
| R | | R | | | | | |

शिक्षार्थियों से कहा जाना चाहिए कि वे मूल तथा पैमाने के आधार पर कम किए गए पैटर्न की आपस में तुलना करें तथा दोनों पैटर्नों में हरी तथा लाल टाइलों में संबंध का पता लगाएं।

आप शिक्षार्थियों से पूछ सकते हैं कि उन्होंने एक खास तरह का पैटर्न क्यों बनाया और यह कैसे तय किया कि उसमें कितने लाल व हरी टाइलें होंगी। यह जरूरी है कि शिक्षार्थी दोनों पैटर्नों के बीच के संबंधों को समझे। यह भी जरूरी है कि वे इस बात को भी समझें कि जब एक पैटर्न को 3 के गुणक में बढ़ाया जाता है तब उसमें इकाइयों की संख्या 9 गुना (3 × 3) बढ़ जाती है क्योंकि यह एक दो आयामी पैटर्न है।

एक काम में, पैमाने का गुणक एक भिन्नात्मक संख्या है। आपको संभवत: उदाहरण लेकर शिक्षार्थियों को 1/2, 1.5 (1 तथा 1/2) कौ पैमाने की मदद से बढ़ाने को समझाने में मदद करनी पड़े।

टाइलीकरण एक तरह से छाप लगाने जैसा है जिसमें दिए गए क्षेत्रफल को भरने के लिए हम पैटर्न को दोहराते हुए एक के बाद एक भरते जाते हैं। इसमें पैमाने की मदद से किसी तरह की घट-बढ़ नहीं की जाती। मुमकिन है कि शिक्षार्थी पैमाने का इस्तेमाल किए बगैर दिए गए पैटर्न का टाइलीकरण कर दें। आप उनके साथ इस बात पर चर्चा कर सकते हैं कि पैटर्न को बढ़ाया या घटाया कैसे जाए, पैमाने के गुणक का क्या मतलब होता है और उसका आनुपातिक तर्क के साथ क्या संबंध है। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को गुणात्मक तरीके से सोचने पर मजबूर करेगी क्योंकि यहां पर योगात्मक तरीके से तर्क करना कम सूझ बूझ का काम है, और अगर वे योगात्मक ढंग से सोचेंगे तो चाहा गया पैटर्न नहीं बना पाएंगे।

आपके पूछने के लिए संभावित कुछ पूरक सवाल नीचे दिए गए हैं :

- अगर आप पैमाने के आधार पर बढ़ाने को गणितीय कथन में दर्शाना चाहे तो उसे कैसे दर्शाएंगे ? उदाहरण के लिए, 6 x 2 के आयत को पैमाने पर 4 गुना बढ़ाना है। इसे आप गणितीय कथन के तौर पर कैसे दर्शाएंगे ?
- सिकोड़ने की प्रक्रिया को आप गणितीय तौर पर कैसे दर्शाएंगे ?

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- अपनी कक्षा में आज हुई दो अलग-अलग चर्चाओं का वर्णन करिए।
- आपने इन्हीं दो को क्यों चुना ?
- इन चर्चाओं की गणितीय अहमियत क्या है ?
- इन घटनाओं के सामाजिक पहलू क्या हैं ?
- इन पैटर्नों को बनाते वक्त शिक्षार्थियों को क्या-क्या मुश्किलें आती हैं ?
- पहले व दूसरे प्रकार के कामों का अवलोकन करके बताइये कि कौनसा काम शिक्षार्थियों के लिए आसान होता है। समझाइए कि वह काम दूसरे काम की तुलना में आसान क्यों होता है।
- पैमाने पर संख्यात्मक तौर पर 3 के गुणक में बढ़ा कर, शिक्षार्थी टाइलों की संख्या कितनी बढ़ाएंगे ? 3 तक या 9 तक ? शिक्षार्थियों को यह समझने में मुश्किल होती है, इस बारे में आप क्या सोचते हैं ?
- शिक्षार्थियों में समस्या समाधान के कौशलों को विकसित करने में प्रत्यक्ष अनुपात का विचार कैसे मदद करेगा ?

# इकाई 2: गुणात्मक तर्क

## पाठ 2.3: जामुनी गई बाजार

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

इस पाठ में, शिक्षार्थी असमान मात्राओं के संदर्भ में गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों का इस्तेमाल करेंगे। यह पाठ शिक्षार्थियों में ज्यामितीय आकृतियों की अवधारणा को इस्तेमाल करते हुए, उनमें अनुपात की समझ को मजबूत करने की कोशिश करेगा। ये गतिविधियां शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देंगी कि वे समान मात्राओं की तुलना करने के लिए आनुपातिक चिंतन में अलग-अलग कार्यनीतियों का इस्तेमाल कर सकें।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे:

- गुणात्मक चिंतन की कार्यनीतियों को लागू करना।
- समान मात्राओं की असमान मात्राओं की तरह गणना करना तथा अदिश (स्केलर यानी पैमाने वाले) तथा सदिश (वेक्टर) अनुपातों का इस्तेमाल करना
- मात्राओं के साथ आनुपातिक संबंधों का इस्तेमाल करना

### गणितीय विचारों पर चर्चा

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>

**गतिविधि-1**: यह गतिविधि इकाईकरण तथा समूहीकरण पर अपना ध्यान केन्द्रित करती है। इसमें शिक्षार्थी या तो किसी एक चीज की कीमत का पता लगाएंगे व उसके बाद कई चीजों की कीमत निकालेंगे या फिर अंडों की एक और एक आधी ट्रे की कीमत का पता लगाने के लिए सुविधाजनक समूह बनाएंगे। इकाईकरण शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देता है कि वे एक के अलावा भी इकाइयां बना सकें। उदाहरण के लिए, 1 अंडे की इकाई के तौर पर तथा एक आधी ट्रे की तीन आधे के तौर पर कीमत का पता लगाने की तुलना में 6 अंडों की कीमत का पता लगाना ज्यादा फायदेमंद है।

काम कुछ इस तरह से है :<br>
जामुनी और उसकी दोस्त एक अंडे की दुकान पर हैं। वे दोनों अंडों की एक ट्रे देखती हैं। प्रत्येक ट्रे में 12 अंडे हैं और उसकी कीमत 36 रूपये है। अब, अगर वे एक ऐसी अंडे की ट्रे खरीदना चाहें जिसमें इस ट्रे की तुलना में एक व एक आधे गुना यानी डेढ़ गुना अंडे हों तो उन्हें कितनी रकम अदा करनी होगी ?

</td><td>

शिक्षार्थियों के साथ इस बात पर चर्चा करें ताकि वे ‘एक व एक आधा गुना यानी डेढ़ गुना’ का मतलब समझ पाएं। इस काम को समझ कर करने का एक तरीका यह है कि इस बात को पहचाना जाए कि अंडों की संख्या एक व एक आधा गुना बढ़ाने से अंडों की ट्रे की लागत भी एक व एक आधा गुना यानी डेढ़ गुना बढ़ जाएगी। 36 का एक व एक आधा गुना पता लगाइए क्योंकि अंडों तथा उनकी कीमत का आपसी संबंध आनुपातिक है।

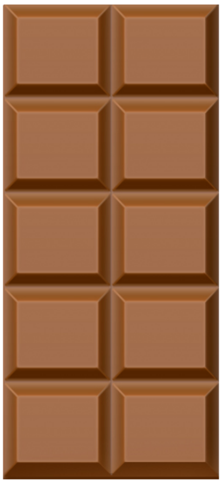
दूसरा तरीका यह है कि पहले एक अंडे की कीमत का पता लगाते हैं और उसके बाद 12 अंडों की एक तथा एक आधा गुना अंडों का पता लगा कर उनकी कीमत निकालते हैं। शिक्षार्थियों को इन अलग-अलग कार्यनीतियों में शामिल करने से, आनुपातिक तर्क के विचार के जरिए उनके गणितीय मॉडलिंग के कौशल विकसित होंगे।

- शबाना जामुनी की दोस्त है और वह अंडों की दो ट्रे खरीदना चाहती है। वह देखती है कि प्रत्येक ट्रे में सफेद व भूरे दोनों ही तरह के अंडे रखे हैं। पहली ट्रे में 12 अंडे हैं, उनमें से 4 भूरे तथा 8 सफेद हैं। दूसरी ट्रे में 18 अंडे हैं। अगर दोनों ट्रे में सफेद व भूरे अंडों का अनुपात बराबर हो तो दूसरी ट्रे में प्रत्येक रंग के कितने अंडे मौजूद होंगे ?

| | **ट्रे-1** | **ट्रे-2** |
|---|---|---|
| अंडों की कुल संख्या | 12 | 18 |
| सफेद अंडों की संख्या | 4 | |
| भूरे अंडों की संख्या | 8 | |

इस काम में 18 की संख्या को दो हिस्सों में इस तरह से बांटने की जरूरत है कि एक हिस्सा दूसरे हिस्सें का दुगुना हो। हमें शिक्षार्थियों का ध्यान इस तरफ दिलाने की जरूरत पड़ेगी कि ट्रे 2 में सफेद व भूरे अंडों का अनुपात वही रहेगा जो कि ट्रे 1 में है। शिक्षार्थी प्रयत्न व भूल के तरीके को भी काम में ले सकते हैं। वे सफेद तथा भूरे अंडों की संख्या को दुगुना कर सकते हैं। ट्रे 1 में रखे सफेद तथा भूरे अंडों की संख्या का यानी एक व एक आधा गुना) करके भी जवाब हासिल किया जा सकता है क्योंकि 18, 12 का डेढ़ गुना होता है। सफेद व भूरे अंडों की संख्या मिला कर डेढ़ गुना होगी, यह तथ्य बहुत अहम है, इसे रेखांकित किया जाना चाहिए।

</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-2:** यहां पर, अब तक शिक्षार्थियों द्वारा काम लिए गए परिचित लेकिन अलग संदर्भ उपलब्ध करवाने की कोशिश की गई है। गणितीय तौर पर सीखना पक्का करने के लिए, यह जरूरी है कि संदर्भ को बदला जाए ताकि शिक्षार्थी एक संदर्भ में बनी अपनी समझ को, दूसरे संदर्भों में इस्तेमाल करना सीखें।<br>अमन ने अपने दोस्तों के बीच साझा (बाँटने) के लिए एक चॉकलेट बार खरीदना तय किया। जब वह चॉकलेट की दुकान पर गया तो उसे कुछ समस्याओं का सामना करना पड़ा। आप उन समस्याओं को हल करने में उसकी मदद करिए।<br>• एक सफेद चॉकलेट की बार में 10 छोटे टुकड़े हैं। अगर अमन अपने प्रत्येक दोस्त को दो छोटे टुकड़े देना तय करे, तो वह अपने कितने दोस्तों के साथ उस बार को साझा कर सकता है ?<br>• दुकानदार 3 छोटे आकार की सफेद चॉकलेट के पैक को 4 रूपये में बेचता है। अगर अमन 40 रूपये खर्च करे तो वह इस तरह के कितने टुकड़े खरीद सकता है।<br>• दुकानदार भूरी चॉकलेट के एक छोटे टुकड़े के 4 रूपये लेता है। अगर अमन ऐसे 10 टुकड़े खरीदना तय करता है तो उसे कितनी रकम की जरूरत पड़ेगी ?<br> | इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों को एक से ज्यादा संदर्भ तथा अनुभव उपलब्ध करवाना है ताकि वे आनुपातिक तर्क की कार्यनीतियों की छानबीन कर सकें। आप शिक्षार्थियों की मदद करें ताकि वे अलग-अलग कार्यनीतियों को आजमा कर देख सकें।<br><br>समानुपात से जुड़ी समस्याओं को दो तरीकों से हल किया जा सकता है – ‘अनुपातों के बीच में’ का पता लगा कर और ‘अनुपातों के अंदर’ का पता लगा कर। इस समस्या को पढ़ें : अगर 4 चॉकलेट की लागत 12 रूपये हो, तब 8 चॉकलेट की लागत क्या होगी ? अनुपातों के बीच का इस्तेमाल करके हम देख सकते हैं कि चॉकलेट की संख्याओं के बीच में 1:2 (4:8) का अनुपात है और लागत का अनुपात भी 1:2 होगा। इसलिए, 8 चॉकलेट की लागत 12 की दुगुनी यानी 24 होगी। अनुपातों के अंदर वाले तरीके का इस्तेमाल करने के लिए हमें प्रत्येक चॉकलेट की लागत निकालनी पड़ेगी। इसे वेक्टर (सदिश) वाला तरीका भी कहते हैं। प्रत्येक चॉकलेट की लागत का इस्तेमाल बाद में 8 चॉकलेट की लागत निकालने में किया जाता है। |

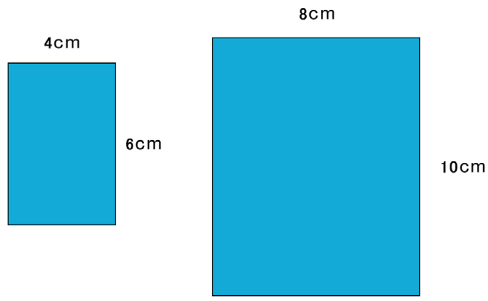
**गतिविधि-3:** इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों के सामने आनुपातिक तर्क की कार्यनीतियों की छानबीन करने के लिए, ज्यादा संदर्भ तथा अनुभव प्रस्तुत करना है। आप शिक्षार्थियों की मदद करें ताकि वे अलग-अलग कार्यनीतिओं का इस्तेमाल कर सकें।
जमुनी और उसकी दोस्त को प्यास लग रही थी। वे दोनों रस की दुकान पर गईं। रस की दुकान पर दो विकल्प मौजूद थे: 6 लीटर का डिब्बा 200 रुपये में और 4 लीटर का डिब्बा 150 रुपये में।

कौनसा डिब्बा सस्ता है ?

- 6 लीटर का डिब्बा
- 4 लीटर का डिब्बा

शोध-कार्यों में यह पाया गया कि शिक्षार्थी इस तरह की समस्याओं को हल करने में बहुत परिष्कृत कार्यनीतियों का इस्तेमाल कर सकते हैं। वे कह सकते हैं कि वे रस के बड़े डिब्बे में रस भरने के लिए रस के छोटे डिब्बे का इस्तेमाल कर सकते हैं। वे बड़े डिब्बे को पूरा भरने के लिए उसमें छोटे डिब्बे को एक बार पूरा व एक बार आधा भर कर डाल सकते हैं। यहां पर तर्क यह है कि बड़े डिब्बे में 4 + 2 लीटर भरा जा सकता है। इसी तर्क से, बड़े डिब्बे की लागत 150 + 75 = 225 होगी। लेकिन इसकी असल लागत तो 200 रुपये है और इस तरह से 6 लीटर का डिब्बा सस्ता पड़ता है । हम दोनों डिब्बों में एक लीटर रस की लागत निकाल कर व उनकी आपस में तुलना करने की कार्यनीति का भी इस्तेमाल कर सकते हैं।

**गतिविधि-4:** यह एक दूसरे प्रस्तुतीकरण में पैमानीकरण की समस्या है। अब तक शिक्षार्थी आयामों के बारे में आनुपातिक ढंग से तर्क करने के काबिल हो चुके होंगे।
जामुनी एक वर्गाकार कागजी रुमाल खरीदना चाहती है लेकिन दुकानदार के पास सिर्फ आयताकार कागजी रुमाल हैं। नीचे दिए गए दो कागजी रुमालों को देखिए। कौनसा ज्यादा वर्गाकार है और क्यों ?




यह सवाल शिक्षार्थियों से यह उम्मीद रखता है कि वे अपनी ज्यामितीय आकृतियों की समझ को समानुपात की समझ के साथ जोड़ कर देख पाएंगे। वर्ग में दोनों भुजाएं बराबर लंबाई की होती है, उसमें लंबाई तथा चौड़ाई का अनुपात 1:1 का होता है। लंबाई और चौड़ाई को अनुपात जितना 1:1 के करीब होगा, वह आकृति उतनी ही ''वर्ग जैसी'' नजर आने लगेगी। कोई भी व्यक्ति दोनों आकृतियों में लंबाई व चौड़ाई का अनुपात निकाल कर उनकी तुलना कर सकता है।

कोई भी व्यक्ति इससे आगे बढ़ कर पहली आकृति के साथ दूसरी आकृति की लंबाई की तुलना करके उनके आपसी संबंधों का पता लगा सकता है। ये आपस में समान हैं लेकिन एकदम समान नहीं है जैसा कि आंतरिक व बाहरी अनुपात में पाया जाता है। पैमानीकरण के आधार पर बनाई गई आकृति में लंबाई के साथ चौड़ाई के अनुपात को बरकरार रखा जाएगा और लंबाई के साथ लंबाई के अनुपात (पहले चित्र के साथ दूसरा चित्र) चौड़ाई के साथ चौड़ाई के अनुपात (पहले चित्र के साथ दूसरा चित्र) के समान होगा।

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- गतिविधि-1,2,3 व 4 में शिक्षार्थियों द्वारा इस्तेमाल की गई, गुणात्मक चिंतन वाली कार्यनीतियों में से कुछ के बारे में बताइए।
- इस पाठ में दी गई गतिविधियों को करते हुए शिक्षार्थी एक दूसरे से किस किस्म की चीजों को सीखेंगे ?
- क्या आप सोचते हैं कि इस पाठ में दी गई समस्याएं तथा संदर्भ शिक्षार्थियों की खुद की गुणात्मक चिंतन संबंधी समझ को मजबूत करने में मदद करेंगे ? क्या आप ऐसे ही कुछ और संदर्भों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें आनुपातिक तर्क का इस्तेमाल किया जाता हो ?
- इन गतिविधियों से जुड़े ऐसे पांच सवालों की सूची बनाइए, जिन्हें आप शिक्षार्थियों से पूछना पसंद करेंगे ताकि आप न सिर्फ यह जान सकें कि वे कितना सीखें हैं बल्कि यह भी समझ पाएं कि उनके साथ आनुपातिक तर्क पर की जाने वाली चर्चा को आगे बढ़ाने में किस तरह की मदद की जरूरत है।
- क्या आप कुछ और कामों को डिजाइन कर सकते हैं जो शिक्षार्थियों में गुणात्मक चिंतन के कौशलों को विकसित करने में मददगार हो सकें ?

# इकाई 2: गुणात्मक तर्क

## पाठ 2.4: साहिर ने बनाया पोस्टर

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

इकाई 2 के इस आखिरी पाठ में एक फोटो को बड़ा करके पोस्टर बनाने के संदर्भ का इस्तेमाल किया गया है। इसी संदर्भ से जुड़ी कई और समस्याएं भी रखी गई हैं। शिक्षार्थी किसी आयत के प्रत्येक आयाम में होने वाले बदलाव तथा उसकी वजह से उस आकृति के क्षेत्रफल में होने वाले बदलाव पर पड़ने वाले असर के बीच संबंधों की छानबीन करेंगे। खींचने (यानी स्ट्रेचिंग) तथा पैमाने पर बड़ा या छोटा करने (यानि स्केलिंग) में फर्क को रेखांकित किया जाएगा। इस पाठ में आए रोजमर्रा की परिस्थितियाँ समानुपात के विचार को दैनिक जिंदगी के क्रियाकलापों के साथ जोड़ने में शिक्षार्थियों की मदद करेंगे।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- समान मात्राओं की मदद से गुणात्मक तर्क का इस्तेमाल करना।
- आनुपातिक तर्क तथा गुणात्मक चिंतन को इस्तेमाल करना।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>
गतिविधि-1: यह काम आनुपातिक तर्क के खींचने वाले (स्ट्रेचिंग) पहलू पर दुबारा जोर देता है तथा सीधे अनुपात में एक और मापक के तौर पर आकृतियों के क्षेत्रफल को जोड़ता है।<br><br>
सवाल-1: साहिर एक फोटो के आयामों को दुगुना करना चाहता है। बड़े किए गए फोटो के आयाम क्या होंगे ?<br><br>
<table>
<tr><th></th><th>लंबाई (सेमी)</th><th>चौड़ाई(सेमी)</th></tr>
<tr><td>फोटो</td><td>7</td><td>5</td></tr>
<tr><td>पोस्टर</td><td></td><td></td></tr>
</table><br>
सवाल-2: फोटो के क्षेत्रफल तथा पोस्टर के क्षेत्रफल के बीच संबंध का पता लगाएं। इसके अलावा अगर आपने इन दोनों आकृतियों के बारे में कोई भी बात बताने लायक हो तो उसे भी दर्ज करें।<br><br>
सवाल-3: फोटो के आयामों को आपस में अदल-बदल कर लें, लंबाई को चौड़ाई बना दें तथा चौड़ाई को लंबाई बना दें। आप क्या देखते हैं ? दोनों फोटो की तुलना करें तथा इस बात की पहचान करें कि दोनों में क्या समानताएँ हैं और क्या अंतर है।<br><br>
सवाल-4: एक मूल फोटो को पैमाने के आधार पर सही तरीके से बढ़ा कर उसकी चौड़ाई 20 सेमी. कर दी गई। पैमाने के आधार पर बढ़ाए गए फोटो की ऊँचाई का पता लगाइये जो कि मूल आकार का दुगुना है।<br><br>
नई ऊँचाई : _________ सेमी.
</td><td>
शिक्षार्थियों को इस बात के बारे में सोचने की जरूरत पड़ेगी कि प्रत्येक आयाम को दुगुना करने पर क्षेत्रफल 4 गुना बढ़ जाएगा। आप शिक्षार्थियों के साथ अलग-अलग ज्यामितीय आकृतियों, जैसे, त्रिभुज तथा समानांतर चर्तुर्भुज का उपयोग करते हुए, ऐसे और भी अभ्यास कर सकते हैं और उनके साथ आयामों में बदलाव तथा इससे उस आकृति के क्षेत्रफल पर पड़ने वाले असर के बारे में चर्चा कर सकते हैं।<br><br>
आकृति के आयामों को आपस में अदल-बदल करने पर उसका क्षेत्रफल समान रहता है। लेकिन उस फोटो की छवि टेढ़ी-मेढ़ी हो जाती है।<br><br>
समानुपात के विचार का इस्तेमाल करते हुए आप शिक्षार्थियों के साथ ऐसी ही और भी समस्याओं पर चर्चा कर सकते हैं।
</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| गतिविधि-2: यहां पर, समानुपात की अवधारणा को मजबूत करने के लिए सरल रेखीय वृद्धि के एक दूसरे संदर्भ का इस्तेमाल कया गया है। वृद्धि की अवधारणा का उपयोग आनुपातिकता के विचार में गतिशीलता पैदा कर देता है।<br><br>सवाल 1: अगर एक पौधा हर सप्ताह तीन गुना बढ़ता है तो वह पहले व दूसरे सप्ताह के आखिर में कितना ऊंचा हो जाएगा?<br><br>निर्देशात्मक लिखित सामग्री : पहले व दूसरे सप्ताह के आखिर में पौधे की वृद्धि दर्शाने के लिए जियोजेब्रा नामक सॉफ्टवेर का इस्तेमाल करें।<br><br>सवाल 2: पौधे की शुरूआती ऊँचाई तथा दो सप्ताह बाद उसकी ऊँचाई में क्या संबंध है ?<br><br>• पौधे की ऊँचाई उसकी मूल ऊँचाई की 3 गुना होगी।<br>• पौधे की ऊँचाई उसकी मूल ऊँचाई की 6 गुना होगी।<br>• पौधे की ऊँचाई उसकी मूल ऊँचाई से 2 इकाई ज्यादा होगी।<br>• पौधे की ऊँचाई उसकी मूल ऊँचाई से 3 इकाई ज्यादा होगी। | जियोजेब्रा के औजार यानी टूल की मदद से, शिक्षार्थी इस सवाल की छानबीन कर सकते हैं और इसी तरह के दूसरे सवालों को भी हल करके देख सकते हैं। आप कुछ नई समस्याएं बना कर उन्हें दे सकते हैं जिसे वे जियोजेब्रा की मदद से हल करके देख सकें। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- इकाई के आखिर में, आप क्या सोचते हैं कि शिक्षार्थी क्या-क्या समझ चुके होंगे ? कक्षा में घटित किन घटनाओं तथा शिक्षार्थियों के किस व्यवहार के आधार पर आपको यह भरोसा हुआ है ?
- आपकी नजर में शिक्षार्थियों के साथ किन गणितीय विचारों पर आगे और चर्चा करने की जरूरत है ?

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

# इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात

## इकाई का अवलोकन (ओवरव्यू)

इस इकाई में, शिक्षार्थी अनुपात की औपचारिक संकेतन यानी नोटेशन को समझने की शुरुआत करेंगे, जिसमें यह बताया जाएगा कि एक चीज की तुलना में दूसरी चीज कितनी है। शिक्षार्थी अपनी हिस्सेदारी/बंटवारे, बराबर बंटवारे तथा गुणात्मक चिंतन की समझ की बुनियाद पर अनुपात के साथ संख्यात्मक तौर पर तथा डिजिटली काम करेंगे। इस इकाई में व्यावहारिक के साथ साथ डिजिटल गतिविधियां भी शामिल की गई हैं। नीबू पानी में बर्फ के घनाकार टुकड़ों को मिलाने की डिजिटल गतिविधि, सीधे व विपरीत होने के अपनी सूझ से बने विचारों को विकसित करने में शिक्षार्थियों की मदद करेगी। रोजमर्रा की जिंदगी के संदर्भों के साथ जुड़ाव शिक्षार्थियों की इस बात में मदद करेगा कि वे आनुपातिक तर्क की रोजाना की जिंदगी में सार्थकता तलाश पाएं। नक्शा बनाने जैसे व्यावहारिक काम शिक्षार्थियों को अनुपातों के इस्तेमाल के प्रति जागरूक करेंगे और उनकी प्रासंगिकता को रेखांकित करेंगे। शिक्षार्थियों को इस बात का मौका मिलेगा कि वे अनुपात की संकेत पद्धति के विचार तथा अलग-अलग कामों के जरिए एक से ज्यादा संदर्भों में सीधे व विपरीत (उलट) अनुपातों की छानबीन कर पाएं।

**सीखने के उद्देश्य**
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

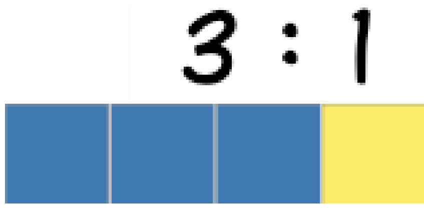
- अनुपात की संकेत-पद्धति (संकेतन) को पढ़ना व उसका सटीक इस्तेमाल कर पाना तथा सार्थक संदर्भों में उसके इस्तेमाल को समझा पाना।
- सीधे व विपरीत (उलट) वेरियेशन को शामिल करते हुए अनुपात के विचार को समझा पाना व उसे इस्तेमाल कर पाना।.
- सीधे व विपरीत (उलट) आनुपातिक विचारों को विविध तरह के संदर्भों में इस्तेमाल करते हुए समस्याओं को हल कर पाना।

## इकाई का विवरण

| क्र. | पाठ का नाम | पाठ का प्रकार | पाठ का वर्णन |
|---|---|---|---|
| 3.1 | अनुपात की संकेत-पद्धति (संकेतन) समझना | कार्य-पत्रक (वर्कशीट) | इस पाठ में, जामुनी अपने अनुपात तथा समानुपात संबंधी ज्ञान को अपने आस-पास की चीजों पर इस्तेमाल करना शुरू करती है। उसकी निगाह अपने आस-पास के कई अनुपातों पर पड़ती है, वह उन्हें दर्ज कर लेती है और उन पर सवाल बनाती है। ऐसा ही अनुभव हमारे शिक्षार्थियों को भी मिलना चाहिए ताकि वे अपने आस-पास पाई जाने वाली मात्राओं में अनुपात को देखना शुरू कर सकें। यह पाठ दैनिक जीवन के साथ शिक्षार्थियों की गणितीय अंत:क्रिया को वैधता प्रदान करता है। |
| 3.2 | जामुनी के साथ नक्शा पढ़ना | व्यावहारिक | इस पाठ में, जामुनी नक्शों को पढ़ना व उनका इस्तेमाल करना सीखती है। जामुनी की मदद करने के दौरान शिक्षार्थी पैमानीकरण के आधार पर, नक्शे की मदद से असली दूरी का पता लगाते हैं। शिक्षार्थी जामुनी की मदद करते वक्त पैमानीकरण तथा खींचने की अवधारणाओं का भी इस्तेमाल कर सकते हैं। इसे करने के लिए उन्हें पैमाना मानने तथा गुणात्मक तर्क को समझना पड़ेगा ताकि वे दो जगहों के बीच की दूरी का पता लगा सकें और इसका उलट भी कर सकें। |
| 3.3 | पट्टियों के इस्तेमाल से लंबाई का पता लगाना | व्यावहारिक | शिक्षार्थी एक बार फिर से स्थानिक मोड में पैमानीकरण तथा खींचने के विचारों पर काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में व्यक्त करना सीखते हैं । पाठ की शुरुआत में शिक्षार्थी कागज की पट्टियों की तुलना करके उनके बीच पाए जाने वाले गुणात्मक संबंध का पता लगाते हैं। अलग-अलग इकाइयों का इस्तेमाल करके मापन करते हैं, और इससे शिक्षार्थी एक इकाई तथा एक पूरे के बीच के संबंधों पर सोचने के लिए मजबूर होते हैं और इससे आगे बढ़ कर यह भी देखते हैं कि ये संबंध सीधे यानी प्रत्यक्ष आनुपातिक हैं या विपरीत आनुपातिक हैं। |
| 3.4 | नीबू पानी में बर्फ के टुकड़े | डिजिटल | यह आयतन के विचार पर आधारित एक डिजिटल गतिविधि है। शिक्षार्थी जामुनी की यह तय करने में मदद करेंगे कि किसी चीज को आनुपातिक तौर पर समान या असमान करने के लिए बर्फ के कितने टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी। |

## गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

| काम और गणितीय प्रासंगिकता | शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां |
|---|---|
| **गतिविधि-1:** गणित में उपयोग की जाने वाली कई दूसरी संकेत-पद्धतियों (संकेतन) की तुलना में अनुपात को दर्शाने वाली संकेतन गैरमामूली तौर पर अलग है। दो मात्राओं A तथा B के बीच तुलना को A:B के रूप में व्यक्त किया जाता है। संकेतन A:B भागफल को दर्शाती है जब A में B का भाग दिया जाता है। अनुपात अक्सर एक ही प्रकार की मात्रा के लिए लिखे जाते हैं। एक जरूरी बात हमें शिक्षार्थियों तक पहुंचानी है कि यह तुलना योगात्मक नहीं है। उदाहरण के लिए, जामुनी का वजन 25 किलो है और उसके पिता का वजन 75 किलो है। इस मामले में जामुनी व उसके पिता के वजन के अनुपात को इस तरह से दर्शाया जाएगा - 25:75 और यह अनुपात 75 – 25 = 50 नहीं होगा बल्कि 25 भाजक 75 होगा। अनुपात को समझने के लिहाज से यह अंतर काफी महत्त्वपूर्ण है। इन दो संख्याओं के बीच का संबंध गुणात्मक है।<br><br>इस गतिविधि में जामुनी तथा उसके दोस्तों को अपने अवलोकन के आधार पर अनुपात लिखने हैं।<br><br>सामने वाले स्तम्भ में दिए गए उदाहरणों की मदद से समझाने के बाद शिक्षार्थियों को कार्य-पत्रक में दी गई समस्याओं को हल करने को कहा जा सकता है।<br><br>• एक विशाल पहिए में हर दो लड़कियों के साथ एक लड़का है।<br>• एक किसान के पास बेचने के लिए 2 बकरे और 10 मुर्गियां हैं।<br>• लीना की  माता उसकी तुलना में 3 गुना ऊंची है। (आप यहां पर इस बात पर जोर दे सकते हैं कि ऊँचाई एक समान मात्रा है जबकि इससे  पहले की दो समस्याओं में असमान मात्राएं काम में ली गई हैं।)<br>• जियो लंबाई में इंस्पेकटर काटा से 2 1/2 गुना छोटा है।(आप इस अनुपात को कई तरीकों से दर्शा सकते हैं - 2 1/2 : 1, या 5:2, या 2.5:1.) | जामुनी की ही तरह अपने शिक्षार्थियों से कहें कि वे अपने आस-पास की जिंदगी में पाए जाने वाले अनुपातों पर ध्यान दें, और उन अनुपातों को मौखिक के साथ साथ लिखित तौर पर भी व्यक्त करने के लिए कहें। अगर उन्हें किसी किस्म की कोई मुश्किल पेश आए तो रेखाचित्र बना कर उनकी मदद करें। यहां पर ऐसा ही एक उदाहरण दिया गया है। आप एक या दो उदाहरणों की मदद से संकेत-पद्धति में लिखे हुए अनुपात को समझाने के लिए उन्हें शब्दों में बोल कर बता समझा सकते हैं।<br><br>• ‘3 नीले वर्गों के लिए 1 पीला वर्ग है’ को इस तरह से दर्शाया जा सकता है :<br><br><br><br><br>• एक किसान 4 गाएं तथा 8 सूअर बेच रहा है। तो गायों व सूअरों का अनुपात 4:8 होगा। |

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-2:** अनुपात संकेतन की व्याख्या करना एक चुनौतीपूर्ण काम है क्योंकि अनुपात को पढ़ने में जिस भाषा का इस्तेमाल किया जाता है, उसे गणित की दूसरी कई सारी अवधारणाओं जैसे, संभावना, प्रायिकता तथा भिन्न, में इस्तेमाल की जाती है। हमें शिक्षार्थियों द्वारा की गई अलग-अलग व्याख्याओं के प्रति सचेत रहने की जरूरत है।<br><br>मेले में वीडियो गेम के कमरे में 27 बच्चे हैं। उनमें लड़कियों तथा लड़कों का अनुपात 3:6 है। नीचे दिए गए कथनों में से कौनसा या कौनसे कथन सही हैं ?<br><br>• लड़कों तथा लड़कियों का अनुपात 6:3 है।<br>• वीडियो गेम के कमरे में आधे बच्चे लड़कियां हैं।<br>• हम वीडियो गेम के कमरे में मौजूद लड़कों की एकदम सटीक संख्या जानते हैं।<br>• हम वीडियो गेम के कमरे में मौजूद लड़कियों की एकदम सटीक संख्या जानते हैं।<br>• अगर हम मनमाने यानी यादृच्छिक तरीके से 9 बच्चों को चुनें तो हम यह उम्मीद कर सकते हैं कि उनमें से 3 लड़कियां होंगी।<br>• हम यह गणना कर सकते हैं कि वीडियो गेम के कमरे में कितने लड़के हैं, अगर उसमें कुल 35 बच्चे मौजूद हैं और उनका लैंगिक अनुपात उतना ही है जितना ऊपर के सवालों में दिया गया है। | एक बार फिर से, यहां पर विविध संदर्भों तथा हालातों को देने की कोशिश की गई है ताकि शिक्षार्थियों में, विविध तरह के संदर्भों में अनुपात व समानुपात की समझ को विकसित हो पाए।<br><br>शिक्षार्थियों की समझ पर नजर रखने के लिए नीचे दी गई पूरक गतिविधियां की जा सकती हैं।<br>• शिक्षार्थियों को कुछ अनुपात दें तथा उन्हें अपने आस-पास का कोई एक हालात डिजाइन करने को कहें।<br>• यह उन कामों का उलट है जो वे पहले कर रहे थे। इस गतिविधि से जुड़ने से उन्हें यह समझ में आएगा कि असली जिंदगी की चीजों को किस तरह से अनुपात की मदद से व्यक्त किया जाता है।<br>• अपने शिक्षार्थियों से कहें कि वे अखबारों की कतरनें लाएं जिनमें अनुपात की संकेत-पद्धति का इस्तेमाल किया गया हो।<br>• उन्हें समझाने दें कि उनमें अनुपातों का इस्तेमाल कैसे किया गया है।<br>• बहुत सारी चीजों, जैसे सिर में लगाने वाला तेल, क्रीम, मंजन आदि के डिब्बों पर, उनमें पाए जाने वाली चीजों के नाम लिखे होते हैं। अध्यापक उन मात्राओं को अनुपात में व्यक्त करने के लिए कह सकते हैं। |
| **गतिविधि-3:** यह सवाल आकलन करने के लिए है। शिक्षार्थी इस पर अपने आप काम करेंगे। | मेले में लगे सर्कस के एक तंबू में 100 व्यक्ति बैठ सकते हैं। वह दो भागों में बंटा हुआ है। पहले भाग में 30 सीटें हैं और दूसरे भाग में 70 सीटें हैं। शो देखने के लिए कुल 80 व्यक्ति आए और पहले भाग की सभी सीटें भर गई थी।<br>• पहले तथा दूसरे भाग में सीटों का अनुपात क्या है ?<br>• तंबू में खाली सीटों तथा भरी सीटों का अनुपात क्या है ?<br>• दूसरे भाग में खाली सीटों और भरी सीटों का अनुपात क्या है ? |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- शिक्षार्थियों की समान तथा असमान अनुपात की समझ की जांच करने के लिए आकलन के दो सवाल बनाएं। इस बात का पूरा ख्याल रखें कि सवाल में परिचित संदर्भों को इस्तेमाल किया जाए।
- इस कार्य-पत्रक का इस्तेमाल करते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आने वाली चुनौतियों का वर्णन करें।
- उच्च प्राथमिक स्कूली स्तर के दो ऐसे प्रकरण बताइए जो आपके विचार से अनुपात तथा समानुपात के विचार से जुड़े हैं। समझाइये कि वे इस विचार से किस तरह से जुड़े हैं।

# इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात

## पाठ 3.2: जामुनी ने पढ़ा नक्शा

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

गुणात्मक चिंतन की प्रक्रिया ऐसे हालातों के साथ जुड़ी रहती है जिनमें न्यायपूर्ण हिस्सेदारी/बंटवारा, पैमानीकरण, खींचना, नकल बनाना तथा घातांक शामिल होते हैं। बराबर हिस्सेदारी तथा साझेदारी से जुड़े सवाल शिक्षार्थियों के विचारों को मजबूत करने के साथ यह इकाई पैमाना बनाने के विचार को संबोधित करती है। साथ ही, संख्यात्मक के साथ-साथ स्थानिक संबंधों में नक्शों को पढ़ने में उस विचार को इस्तेमाल करने पर भी काम करती है। इस पाठ की शुरुआत में, जामुनी नक्शें को पढ़ने व उसमें पैमाने का इस्तेमाल करने पर काम करती है। आखिरकार वह नक्शें पर दिए गए चित्रों को समझने तथा पैमाना मान कर उस पर भी काम करती है। नक्शें पर पैमाने का इस्तेमाल करना समान अनुपातों के लिए एक और संदर्भ उपलब्ध करवाता है। नक्शें पर, पैमाने तथा असली दूरी के बीच समान अनुपात होता है।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- किसी नक्शें में दर्शायी गई दूरी को नापना तथा पैमाने का इस्तेमाल करके उसके तुल्य असली दूरी का पता लगाना।
- नक्शा बनाना तथा पैमाना मान कर उसका स्थानिक तथा संख्यात्मक संदर्भों में इस्तेमाल करना।
- पैमानीकरण-खींचना तथा सिकुड़ने की अवधारणा का इस्तेमाल करना।
- गुणक की अवधारणा को पढ़ना तथा लिखना तथा एक गुणक की मदद से गुणात्मक तर्क की शुरुआत करना और दिए गए पैमाने की मदद से दो जगहों के बीच की दूरी का पता लगाना व इसका उलट काम करना।
- पैमानीकरण तथा फैक्टर की गहरी समझ विकसित करने के लए कक्षा में होने वाली चर्चा में भागीदारी करना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ(यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

| काम और गणितीय प्रासंगिकता | शिक्षार्थियों के विचार तथा शिक्षार्थियों के सीखने में मदद करने वाली संभावित कार्यनीतियां |
|---|---|
| **गतिविधि-1:** इस सवाल में शिक्षार्थियों को इस बात का मौका मिलेगा कि वे पैमानों की मदद से दूरी का मापन कर सकें। उन्हें पैमाने के विचार से परिचित करवाया जाएगा। नक्शें पर पैमाने का मतलब होता है कि नक्शें में दो जगहों के बीच की दूरी के साथ असल दुनिया में उन जगहों के बीच दूरी के साथ अनुपात। यह अनुपात पूरे नक्शें में एक समान होता है। | नक्शों पर आम तौर पर गणित की कक्षाओं में न तो बातचीत की जाती है न ही उन पर काम  किया जाता है। नक्शों का गणित में इस्तेमाल करना इस मॉड्यूल का अनूठा प्रयास है। नक्शे में पैमाने की अवधारणा इस बात का मौका उपलब्ध करवाती है कि हम नक्शें पर दी गई दूरी का असली दूरी के साथ अनुपात निकाल पाएं। इस बात की बहुत संभावना है कि शिक्षार्थी पहले सवाल में, नक्शें पर लंबाई मापने की अलग-अलग कार्यनीतियों का इस्तेमाल करें। अध्यापक को उन कार्यनीतियों पर चर्चा करनी चाहिए जो नक्शें पर करीब करीब सही दूरी बता सके। नक्शें को पढ़ना कोई आम कौशल नहीं है। अलग-अलग दूरियों को नापने में शिक्षार्थियों को थोड़ा वक्त लगाने दें तथा उसमें से उन्हें पैमाने के विचार को निकालने दें। कक्षा में नीचे दी गई बातों पर चर्चा करें :<br>• पैमाना लेना क्यों महत्त्वपूर्ण है ?<br>• अगर असली दूरियों तथा नक्शें पर दी गई दूरियों के बीच अनुपात पूरे नक्शें में एक समान न हो तो क्या होगा ?<br>• पैमाने के विचार को नक्शें में काम में लेने का क्या कोई दूसरा तरीका भी होता है ?<br>• नक्शें कैसे बनते हैं ?<br>इसके बाद शिक्षार्थी अलग-अलग पैमानों को लेकर अभ्यास करें तथा संख्यात्मक गणनाएं करके असली दूरी का पता लगाएं। प्रत्येक मौके पर शिक्षार्थियों से पूछें कि उन्होंने दूरी का पता कैसे लगाया और पैमाने का इस्तेमाल कैसे किया। |

<table>
<tr>
<td>गतिविधि-2: यह पहली गतिविधि का ही विस्तार है, जिसमें शिक्षार्थी पैमानीकरण के विचार को संख्यात्मक संदर्भों में समझते हैं।</td>
<td>नक्शें पर पैमानीकरण को शिक्षार्थी पैमाने के गुणक से गुणा के तौर पर समझते हैं। शिक्षार्थियों के जवाबों का अनुमान लगा कर नीचे दी गई सारणी भरिए।
<table>
<tr><td></td><td>धागे की लंबाई</td><td>असली दूरी</td></tr>
<tr><td rowspan="2">नक्शें का पैमाना (1:25000)</td><td>10 सेमी</td><td></td></tr>
<tr><td>18 सेमी</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">नक्शें का पैमाना (1 सेमी. = 2.5 किमी.)</td><td>12 सेमी</td><td></td></tr>
<tr><td>21 सेमी</td><td></td></tr>
</table>
यहां पर, नक्शें पर दो शहरों के बीच की दूरियों को धागे की लंबाई से नाप कर दिया गया है। इसमें एक पैमाना बहुत बड़ा है और दूसरा दशमलव वाला पैमाना है। यह जान बूझ कर दिया गया है ताकि शिक्षार्थी अलग-अलग नक्शों पर आम तौर पर पाए जाने वाले पैमानों को समझ पाएं।</td>
</tr>
<tr>
<td>गतिविधि-3: गणितीय तौर पर, यह गतिविधि अज्ञात राशि वाले अनुपात की समस्याओं जैसी ही है। इसमें शिक्षार्थी या तो नक्शें पर अज्ञात दूरी या असली दूरी का या फिर पैमाने का पता लगाते हैं।</td>
<td>समान अनुपात की सामान्य समस्याएं, जिनमें समान अनुपात को दर्शाने में चार मात्राओं का इस्तेमाल किया जाता है, उसकी तुलना में इस सारणी में शिक्षार्थी छह मात्राओं पर काम करेंगे। इसलिए यह समस्या शिक्षार्थियों के लिए थोड़ी मुश्किल होगी। पैमाने को निर्धारित करना अनुपात को निर्धारित करने जैसा ही है, जबकि दूरी को निर्धारित करना, दिए गए अनुपातों में अज्ञात राशि को निर्धारित करने जैसा है। शिक्षार्थी संख्यात्मक संदर्भों में ज्यामितीय पैमानीकरण के विचार को भी सीखेंगे।</td>
</tr>
<tr>
<td>गतिविधि-4: जामुनी को एक दोषपूर्ण नक्शा देकर उसमें गलती तलाशने के लिए कहा गया। पिछली तीन गतिविधियों के दौरान शिक्षार्थियों की बनी हुई समझ का इस्तेमाल करने के लिए यह समस्या दी गई है।</td>
<td>जामुनी से पाया कि चार अलग-अलग नक्शों में दूरी का पैमाना अलग-अलग तरह से प्रस्तुत किया गया है। शिक्षार्थियों से यह उम्मीद की जाती है कि वे उस नक्शे को पहचानने में जामुनी की मदद करें जिसमें शहर A तथा B की दूरी बाकी सभी नक्शों से अलग है।
<table>
<tr><td>नक्शा</td><td>A तथा B के बीच नक्शें में दूरी</td><td>नक्शे का पैमाना</td><td>पैमानीकरण के आधार</td></tr>
<tr><td>नक्शा</td><td>125 सेमी</td><td>1:600</td><td></td></tr>
<tr><td>नक्शा</td><td>212 सेमी</td><td>1:1250</td><td></td></tr>
<tr><td>नक्शा</td><td>324 सेमी</td><td>3:1800</td><td></td></tr>
<tr><td>नक्शा</td><td>430 सेमी</td><td>5:2500</td><td></td></tr>
</table>
दोषपूर्ण नक्शें को पहचानने के लिए यह पता लगाना है कि किस नक्शें में दिए गए नापों से मिलने वाली असली दूरी दूसरे नक्शों से मिलने वाली असली दूरी के साथ मेल नहीं खा रही है।</td>
</tr>
</table>

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

1. आलेखों यानी ग्राफों पर दूरियां मापना चुनौतीपूर्ण काम होता है। ऐसे तीन अभ्यासो के बारे में लिखिए, जिनका इस्तेमाल आप कक्षा में सटीक मापन को सुनिश्चित करने के लिए काम में लेंगे।
2. गतिविधि-4 के लिए उन सभी संभावित तर्कों को बताइये, जिनके आधार पर शिक्षार्थी आपके पास आकर यह कह सकते हैं कि नक्शा 2 दोषपूर्ण है।
3. सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए :
   - इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो उनमें से तीन की सूची बनाइए।
   - उन तीन कार्यनीतियों(सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

# इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात

## पाठ 3.3: पट्टियों की मदद से लंबाई का पता लगाना

### पाठ का ओवरव्यू

शिक्षार्थी एक बार फिर से, स्थानिक मोड में पैमानीकरण तथा खींचने के विचारों पर काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी अनुभव आधारित समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में हस्तांतरित करना सीखेंगे। इस पाठ की शुरुआत में, कागज की पट्टियों की आपस में तुलना करके उनके बीच के गुणात्मक संबंधों का पता लगाएंगे। अलग-अलग इकाइयों की मदद से मापन किया जाएगा, जिसकी वजह से शिक्षार्थियों को एक इकाई तथा एक सम्पूर्ण के बीच के संबंधों के बारे में सोचना पड़ेगा, और इससे भी आगे जाकर यह समझा जाएगा कि ये संबंध या तो प्रत्यक्ष आनुपातिक हो सकते हैं या अप्रत्यक्ष आनुपातिक हो सकते हैं।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- कागज की पट्टी को इकाई मानते हुए लंबाई को मापना।
- इस बात को समझाना कि मापन में अगर इकाई छोटी हो तो किसी दूरी को मापने में ज्यादा इकाइयों की जरूरत क्यों पड़ती है।
- प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष आनुपातिक विचारों पर आधारित मापन की इकाइयों को जोड़ तोड़ करके काम ले पाना।
- सीधे व उलटे वेरियेशन के विचारों का इस्तेमाल करना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को चर्चा को इन कामों के इर्द गिर्द केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ(यानी ट्रेजक्टरीज) को समझने के लिए भी सुराग देंगे।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>गतिविधि-1: इस गतिविधि में, कुछ शिक्षार्थी कागज की एक पट्टी को कागज की तीन अलग-अलग लंबाई की पट्टियों की मदद से मापेंगे, इसका मतलब यह है कि वे मापने में अलग अलग इकाइयों का इस्तेमाल करेंगे। अब इस जानकारी का इस्तेमाल करते हुए शिक्षार्थी इस औजार का इस्तेमाल करके मापी गई कागज की  पट्टी की लंबाई का पता लगाएंगे। इस पर काम करते वक्त शिक्षार्थी गुणकों तथा सामान्य गुणकों के विचारों का इस्तेमाल करेंगे।</td><td>इस समस्या में दर्शाए गए तीन शिक्षार्थी, दी गई पट्टी के तीन अलग-अलग माप निकालते हैं। इसकी वजह यह है कि वे तीनों मापने के लिए अलग-अलग पट्टी का मापन की इकाई की तरह इस्तेमाल करते हैं। नीचे दी गई जानकारी के आधार पर, पहले शिक्षार्थियों को यह पता लगाना है कि किसने किस रंग की पट्टी काम में ली और फिर उस कागज की  पट्टी की लंबाई का पता लगाना है।<br><br> <br><br><br>अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 8 पट्टियों के बराबर है।<br>अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 16 पट्टियों के बराबर है।<br>अमन ने पाया कि कागज की लंबाई कागज की 4 पट्टियों के बराबर है।<br><br>शिक्षार्थियों को यहां मापन के संरक्षण को समझाना पड़ेगा कि अलग-अलग पैमाने या अलग-अलग इकाई से मापने का यह मतलब नहीं है कि मापे जा रहे कागज की लंबाई बदल जाती है। मापे जा रहे कागज की लंबाई वही रहेगी चाहे पैमाना कुछ भी हो। ऊपर दी गई जानकारी हमें यह बताती है कि किसी चीज का 8 गुना, या किसी चीज का 16 गुना, या किसी चीज का 4 गुना - यह तीनों ही एक समान मात्रा का माप हो सकता है। अगर किसी चीज को मापने के लिए एक पट्टी की 16 बार जरूरत पड़ती है और उसी चीज को दूसरी पट्टी से 4 बार में मापा जा सकता है तो पहली पट्टी जरूर दूसरी की तुलना में बहुत छोटी होनी चाहिए। इसीलिए हम यह पूर्वानुमान लगा सकते हैं कि लीना 2 सेमी. लंबी पट्टी को मापने के काम में ले रही है। इसलिए दी गई कागज की पट्टी (2 सेमी. × 16 =) 32 सेमी. लंबा है। यहां पर चुनौती यह देखना है कि क्या शिक्षार्थी पहले अलग अलग इकाइयों द्वारा मापने के संदर्भ में दिए गए कागज की लंबाई बराबर मानता है या नहीं। अगर वे ऐसा नहीं करते तो उनसे पूछिए के मापने के पैमाने को बदलने पर माप किस तरह से बदल सकता है। यानी मापने की इकाई को बदलने से जिस कागज की पट्टी को मापना है उसकी लंबाई कैसे बदल जाएगी। और, यह किस तरह का बदलाव होगा ? इस तरह की समस्याओं पर गणित में कैसे काम किया जाता है ? (उदाहरण के लिए, सार्वभौमिक पैमाना)</td></tr>
<tr><td>गतिविधि-2 : इस गतिविधि के दो उद्देश्य हैं, दी गई पट्टी कोमापना तथा इकाई तथा पूरे (पूर्ण) के बीच के संबंध को समझना। शिक्षार्थी अब तक यह समझ गए होंगे कि इकाई छोटी होगी तो मापने के लिए ज्यादा पट्टियों की जरूरत पड़ेगी (उलट वेरियेशन) और लंबी पट्टी होगी तो मापने के लिए कम पट्टियों की जरूरत पड़ेगी (उलट वेरियेशन)। गणितीय तौर पर शिक्षार्थी व्युत्क्रमानुपात सीखेंगे, जिसमें दो मात्राओं का गुणनफल समान होता है।</td><td>इस गतिविधि में, शिक्षार्थी दी गई पट्टी को मापेंगे तथा इकाई के आकार तथा इकाई की लंबाई के बीच संबंधों का पता लगाएंगे।<br><table><tr><th>पट्टी की लंबाई (l)</th><th>इस्तेमाल की गई पट्टियों की संख्या (n)</th><th>l x n</th><th>l/n</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table><br>यह गतिविधि अनुपात के स्थिरांक तथा अनुपात की समझ के बीच पुल बनाने का काम करती है। यहां पर इस्तेमाल किए गए शिक्षाशास्त्रीय अभ्यास सारणी के लिए, अलग-अलग पट्टियों की मदद से अलग-अलग आंकड़े इकट्ठे करते हैं और उसके बाद यह पता लगाते हैं कि कौनसी चीज स्थिर रहती है। फिर शिक्षार्थी तथा अध्यापक मिल कर इस बात पर चर्चा करते हैं कि वह स्थिर क्यों रहता है। कक्षा में अध्यापक कुछ इस तरह के सवाल पूछ सकते हैं :<ul><li>जब मापने वाली पट्टी छोटी होती है तब क्या होता है ?</li><li>जब मापने वाली पट्टी लंबी होती है तब क्या होता है?</li><li>वो क्या चीज है जो समान रहती है और क्यों ?</li></ul>चर्चा के आखिर में, शिक्षार्थियों को समझाएं कि सारणी में दी गई मात्राएं किस तरह से उलट आनुपातिक है। एक मात्रा घटने से दूसरी मात्रा कैसे बढ़ जाती है, और कौनसी मात्रा में कोई फेरबदल नहीं होता, ये सारी बातें व्युत्क्रमानुपात को समझने के लिहाज से काफी महत्तवपूर्ण है।</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| गतिविधि-3: यह गतिविधि, गतिविधि-1 की उलट है। इसमें मापन की इकाई को समान रखा जाता है, और अलग-अलग बच्चों द्वारा अलग-अलग पट्टियों को मापा जाता है। गणितीय तौर पर, शिक्षार्थी प्रत्यक्ष अनुपात सीखेंगे जिसमें मापने वाली पट्टियों की संख्या जितनी ज्यादा होगी, मापी गई पट्टी भी उतनी ही लंबी होगी। | यह गतिविधि प्रत्यक्ष अनुपात का दर्शाने के लिए है। शिक्षार्थी मापेंगे और यह पता लगाएंगे कि अगर मापी जाने वाली पट्टी बड़ी हो तो समान आकार की इकाई से मापते वक्त ज्यादा इकाइयों की जरूरत पड़ती है, और अगर मापी जाने वाली पट्टी छोटी हो तो समान आकार की इकाइयों की कम जरूरत पड़ती है। मापी जाने वाली पट्टी की लंबाई इकाई की पट्टियों की संख्या के बदलने के साथ बदलती रहती है और इससे हमें प्रत्यक्ष अनुपात को समझाने का मौका मिलता है। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

1. प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष या व्युत्क्रमानुपात के हालातों को समझते वक्त शिक्षार्थियों के सामने आई चुनौतियों बताइए।.

2. प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष या व्युत्क्रमानुपात के हालातों में क्या समान रहता है और क्या बदलता है, समझाइए।.

3. ऐसे हालात का डिजाइन कीजिए जिसमें शामिल मात्राएं प्रत्यक्ष आनुपातिक हों और दूसरे परिस्थिति में मात्राएं व्युत्क्रमानुपात हों।

4. सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
   - इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
   - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

# इकाई 3: अनुपात तथा समानुपात

## पाठ 3.4: नीबू पानी में बर्फ के टुकड़े

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

शिक्षार्थी एक बार फिर से, पैमानीकरण, खींचने के विचारों पर स्थानिक मोड में काम करना जारी रखेंगे। वे अपनी अनुभव आधारित समझ को संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण में हस्तांतरित करना सीखेंगे। यह आयतन पर आधारित एक डिजिटल गतिविधि है। शिक्षार्थी मात्राओं को या तो आनुपातिक तौर पर बराबर या असमान बनाने के लिए बर्फ के टुकड़ों की संख्या को तय करने में जमुनी की मदद करेंगे। अलग-अलग आकार के बर्फ के टुकड़ों का इस्तेमाल करते हुए तथा प्रत्येक गिलास में नीबू पानी के आयतन को प्रतिशत में व्यक्त करने जैसे विचारों को इस्तेमाल करते हुए यह गतिविधि शिक्षार्थियों की समझ के सामने चुनौतियां पेश करेगी।

### सीखने के उद्देश्य

इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- आयतन के मापन के संदर्भ में आनुपातिकता के विचारों का इस्तेमाल करना।
- अनुपात-समानुपात के प्रस्तुतीकरण को दूसरी अवधारणाओं जैसे, बर्फ के घनाभाकार टुकड़ों के आयतन, प्रतिशत आदि के साथ जोड़ना।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग उपलब्ध करवाते हैं।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>गतिविधि-1: इस गतिविधि का उद्देश्य शिक्षार्थियों को इस बात से परिचित करवाना है कि जब एक गिलास नीबू पानी में बर्फ मिलाया जाता है तो क्या होता है, खास तौर पर तब क्या होता है जब दो अलग-अलग आकार के बर्फ के टुकड़े मिलाए जाते हैं।</td><td>दो प्रकार के बर्फ के टुकड़े हैं। एक टुकड़े का आयतन 2 घन सेमी. है और दूसरे टुकड़े का आयतन 1 घन सेमी. है। प्रत्येक समस्या के लिए शिक्षार्थी बर्फ के टुकड़े चुनेंगे। ऐसा करने के लिए उन्हें गिलास में भरे नीबू पानी के आयतन पर पड़ने वाले असर का पूर्वानुमान लगाना पड़ेगा। अगर नीबू पानी गिलास से बाहर निकल गया तो समस्या को दुबारा शुरू किया जाता है।<br><br>इस गतिविधि में शिक्षार्थियों का अंदाजा महत्त्वपूर्ण होता है क्योंकि इसमें उनकी दृश्यात्मक के साथ-साथ आयतन की अवधारणा की अवधारणात्मक समझ को भी गूंथना पड़ता है। बर्फ के टुकड़ों के अलग-अलग आकार भी शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देते हैं कि वे प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष बदलावों को देख सकें।<br><br>
<table>
<tr><th>बर्फ के टुकड़ों का आकार</th><th>बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)</th><th>s x n</th><th>s/n</th></tr>
<tr><td>2 घन सेमी</td><td>3</td><td>6</td><td>2/3</td></tr>
<tr><td>1 घन सेमी</td><td>6</td><td>6</td><td>1/6</td></tr>
</table>
<br>प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष वेरियेशन की समझ बनाने के लिए, शिक्षार्थी सारणी में आए पैटर्न का वर्णन करें। चूँकि गिलास का आकार तय है इसलिए उसका आयतन हमेशा बराबर रहेगा। इसका मतलब यह है कि बर्फ के टुकड़ों की संख्या और बर्फ के टुकड़ों का आकार हमेशा एक दूसरे का व्युत्क्रमानुपात रहेगा। दूसरी तरफ प्रत्येक बर्फ के टुकड़े का आयतन उसके आकार के साथ प्रत्यक्ष अनुपाती रहेगा।</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>गतिविधि-2: यह गतिविधि पहले वाले संदर्भ का ही इस्तेमाल करती है और प्रतिशत की अवधारणा का इस्तेमाल करके उसका विस्तार करती है। भरी हुई गिलास का आयतन प्रतिशत में दिया गया है। शिक्षार्थियों को गिलास के बचे आयतन का प्रतिशत में पता लगाना है और यह तय करना है कि बर्फ के कितने टुकड़े डालने हैं। गणितीय तौर पर, जब एक मात्रा प्रतिशत में और दूसरी आयतन में दी गई हो, तो यह जटिलता हालातों को समान बनाता है ।</td>
<td>यहां पर गिलासों का आकार बड़ा है। अमन और जामुनी अभी भी प्यासे हैं और इस बार वे नीबू पानी के बड़े गिलास खरीदते हैं। पांच मिनट के बाद, जामुनी के गिलास में नीबू पानी 40% तक भरा है जबकि अमन के गिलास में नीबू पानी 70% भरा है। सारी बर्फ पिघल चुकी है क्योंकि गर्मी बेतहाशा पड़ रही है। शिक्षार्थियों को जामुनी की मदद करनी है ताकि वह और बर्फ मिला कर गिलास को किनारे तक भर ले।
<table>
<tr><th>प्रतिशत  गिलास में भरा जाने वाला आयतन (v)</th><th>मिलाए गए बर्फ के टुकड़ों की संख्या (n)</th><th>v x n</th><th>v/n</th></tr>
<tr><td>60</td><td>18</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>30</td><td>9</td><td></td><td></td></tr>
</table>
डिजिटल संसाधन पर काम करने से शिक्षार्थियों को, बर्फ के जितने टुकड़े जोड़ने की जरूरत होगी, उनकी संख्या मिल जाएगी। हालांकि, इस गतिविधि का महत्त्वपूर्ण हिस्सा, इन संख्याओं के संदर्भ में यह समझना है कि इस संदर्भ में कितने बर्फ के टुकड़े जोड़े गए हैं।<br>
चर्चा के आखिर में, शिक्षार्थियों को यह समझाएं कि सारणी में दी गई मात्राएं प्रत्यक्ष अनुपात में है। प्रत्यक्ष अनुपात को समझने के लिए यह समझना महत्त्वपूर्ण होता है किसी एक मात्रा को बढ़ाने से दूसरी मात्रा कैसे बढ़ जाती है और वो क्या चीज है, जो स्थिर रहती है। शिक्षार्थियों को जवाब देना चाहिए कि 40% भरी हुई गिलास को किनारे तक पूरी भरने के लिए उन्हें बर्फ के 18 टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी, और 70 % भरी हुई गिलास को भरने के लिए उन्हें बर्फ के 9 टुकड़ों की जरूरत पड़ेगी। इस संदर्भ में, गिलास के खाली हिस्सों को भरने के लिए जरूरी बर्फ के टुकड़ों की संख्या, गिलास में पहले से मौजूद नीबू पानी के आयतन के साथ व्युत्क्रमानुपात में होगी। इसके साथ ही, अध्यापक शिक्षार्थियों से नीचे दिए गए सवाल यह जानने के लिए पूछ सकते हैं कि उन्होंने संदर्भ सहित गणित को कितना समझा है :
<ul>
<li>नीबू पानी के गिलास का आयतन कितना है ?</li>
<li>गिलास के आयतन का 40% कितना होगा ?</li>
<li>40% भरे गिलास को पूरा भरने के लिए बर्फ के कितने टुकड़ों की जरूरत पड़ी ?</li>
<li>इस जानकारी के आधार पर, क्या आप बर्फ के प्रत्येक टुकड़े का आयतन निकाल सकते हैं ? इसका पता लगाने की प्रक्रिया क्या है ?</li>
</ul></td>
</tr>
<tr>
<td>गतिविधि-3: यहां पर हम गणित सीखने के नजरिए से एक महत्त्वपूर्ण कदम उठाते हैं। हम उसी अवधारणा के बारे में सवाल पूछते हैं लेकिन उसका संदर्भ बदल देते हैं। यह जरूरी है कि शिक्षार्थी अपने विचारों को एक संदर्भ से दूसरे संदर्भ में ठीक से इस्तेमाल कर पाएं ताकि अवधारणा के सार को रेखांकित करके सीखा जा सके।</td>
<td>किए गए काम तथा काम में लगने वाले घंटों के संदर्भ को आम तौर पर व्युत्क्रमानुपात में काम में लिया जाता है, इसके साथ किया गया काम स्थिर होता है। यहां पर एक आकलन का सवाल भी है, जिसमें हम यह जांच रहे हैं कि शिक्षार्थी कितनी कामयाबी के साथ एक संदर्भ में सीखी हुई चीज को दूसरे संदर्भ में काम ले पाते हैं।
<table>
<tr><th>कर्मचारियों की संख्या (W)</th><th>घंटों की संख्या (H)</th></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td></tr>
<tr><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

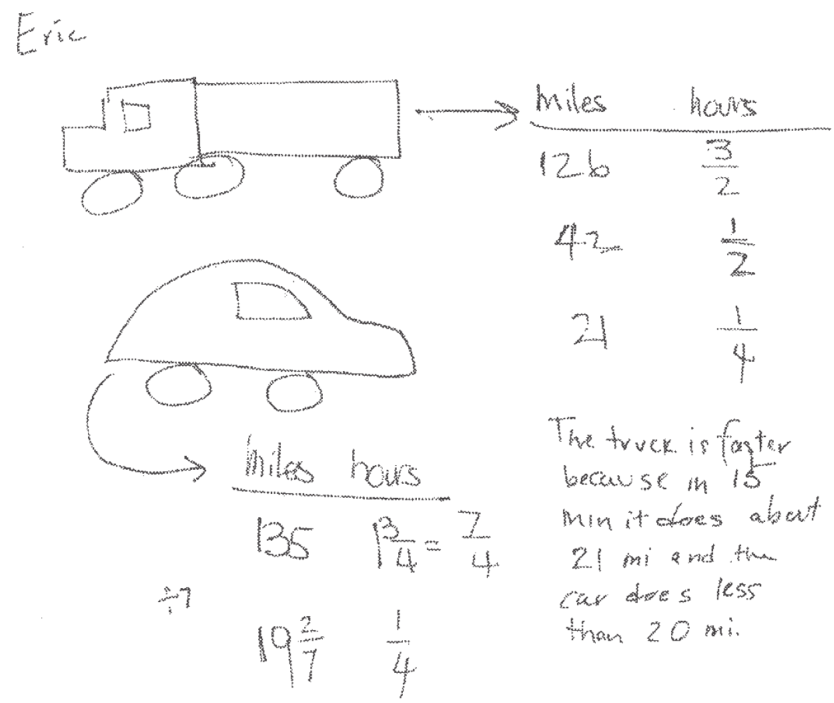
- नीबू पानी तथा बर्फ के टुकड़ों के संदर्भ में एक इस तरह की समस्या बनाएं जिसमें आप दो अलग-अलग आकारों के बर्फ के टुकड़ों का इस्तेमाल करें, गिलास में भरा हुआ आयतन प्रतिशत में बताएं और उसमें प्रत्यक्ष तथा व्युत्क्रमानुपात को काम में लेने का मौका मिले।

- तीन ऐसे संदर्भ बताएं, जिनमें किए गए काम तथा उसके लिए जरूरी घंटों की संख्या के समान हालातों में व्युत्क्रमानुपात शामिल हों।

- सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
  - इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी। ।

- शिक्षार्थी द्वारा नीचे दिए गए जवाब का विश्लेषण कीजिए। अपने सहकर्मियों के साथ इस बात पर चर्चा करिए कि इसे हल करते वक्त बच्चे  के दिमाग में क्या चल रहा होगा।

- Which vehicle has a faster average speed, a truck that travels 126 miles in $1\frac{1}{2}$ hours or a car that travels 135 miles in $1\frac{3}{4}$ hours?



# इकाई 4: अनुपात व समानुपात का इस्तेमाल करना

## इकाई का अवलोकन (ओवरव्यू)

आनुपातिक तर्क, शिक्षार्थियों में परिमेय संख्याओं तथा उससे जुड़ी गुणात्मक अवधारणाओं पर बनी समझ का एक बेहतरीन संकेतक है। यह गणित के ज्यादा जटिल अवधारणाओं की बुनियाद रखता है। गुणात्मक चिंतन की प्रक्रियाएं ऐसे हालातों से संबंधित होती है जिनमें न्यायपूर्ण साझा करना, पैमानीकरण, सिकुड़ना, नकल करना तथा घात के तौर पर बढ़ाना होता है। इस आखिरी इकाई में, हम दूसरे गणितीय विचारों का परिचय करवाते हैं, जिनमें अनुपात-समानुपात के संदर्भों का इस्तेमाल किया गया है। इस पाठ में, शिक्षार्थी सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता पर काम करते हैं और इसमें अनुपात तथा समानुपात के बारे में खुद की बनी समझ का इस्तेमाल करते हैं।
सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता के लिए दो उदाहरण काम में लिए गए हैं – रेल की समय सारणी तथा रेल का इंतजार करते वक्त जामुनी द्वारा खेला जाने वाला एक खेल। रेल की समय सारणी वाली गतिविधि में शिक्षार्थी दिए गए समय में तय की गई दूरी का वक्र खींचने पर काम करेंगे। इसके बाद वे प्रति घंटा तय की दूरी का अनुपात निकालेंगे। बाल्टी-गेंद वाले खेल में, शिक्षार्थी बाल्टी से निकाली जाने वाली गेंद के लाल या पीली होने की प्रायिकता का पता लगाएंगे। दूसरे पाठ में, शिक्षार्थी अनुपात के अंकगणित पर काम करेंगे। वे मिश्र अनुपात निकालेंगे, खाना बनाने के तरीकों वाली समस्या पर उसे लागू करेंगे तथा असली जिंदगी के संदर्भों में उसका अभ्यास करेंगे। मिश्र अनुपात में इस तर्क को समझने की जरूरत पड़ती है कि एक दूसरे के साथ प्रत्यक्ष अनुपाती दो मात्राओं को जब ऐसी किन्हीं दो मात्राओं से गुणा किया जाता है, जो कि खुद भी आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती हैं, तो गुणनफल में हासिल होने वाली मात्राएं भी आपस में प्रत्यक्ष अनुपाती होती है।

**सीखने के उद्देश्य**
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,

- रेखीय समीकरण को ग्राफ पर दर्शाने में आनुपातिक तर्क की अपनी समझ का इस्तेमाल करना।
- प्रायिकता वाले हालातों में आनुपातिक तर्क की अपनी समझ को इस्तेमाल करना।
- गणित दूसरी अवधारणाओं के साथ अनुपात-समानुपात की अवधारणाओं का इस्तेमाल करना।

## पाठ का विवरण

| No | पाठ का नाम | पाठ का प्रकार | पाठ का वर्णन |
|---|---|---|---|
| 4.1 | सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता में समानुपात | कार्य-पत्रक | इस आखिरी इकाई में, हम आपको उन गणितीय विचारों से परिचित करवाएंगे जिनमें अनुपात-समानुपात के संदर्भों का इस्तेमाल किया जाता है। इस पाठ में शिक्षार्थी सरल रेखीय समीकरणों तथा प्रायिकता पर काम करेंगे, और उस दौरान अनुपात-समानुपात पर बनी खुद की समझ का इस्तेमाल करेंगे। |
| 4.2 | मिश्र अनुपात तथा समानुपात | कार्य-पत्रक | इस दूसरे पाठ में, शिक्षार्थी अनुपातों के अंकगणित पर काम करेंगे। पहले वे मिश्र अनुपात निकालेंगे, फिर खाना बनाने के तरीकों की समस्या पर उसे लागू करेंगे और असली जिंदगी के संदर्भों में उसका अभ्यास करेंगे। |

# इकाई 4: अनुपात तथा समानुपात को इस्तेमाल करना

## पाठ 4.1: सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता में अनुपातों का इस्तेमाल

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)

सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता को समझाने के लिए दो उदाहरण काम में लिए गए हैं। पहला, रेल की समय सारणी तथा दूसरा रेल का इंतजार करते वक्त जामुनी द्वारा खेला जाने वाला खेल। समय सारणी वाली गतिविधि में शिक्षार्थी दिए गए समय के दौरान तय की गई दूरी का वक्र बनाएंगे। इसके बाद वे प्रति घंटा में तय की गई दूरी का अनुपात निकालेंगे। जामुनी के बाल्टी-गेंद वाले खेल में शिक्षार्थी बाल्टी से निकाली जाने वाली गेंद के लाल या पीली होने की संभावना की गणना करेंगे।

### गणितीय विचारों पर चर्चा

इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग उपलब्ध करवाते हैं।

<table>
<tr><th>काम और गणितीय प्रासंगिकता</th><th>शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां</th></tr>
<tr><td>गतिविधि-1: यह गतिविधि में रेखीय समीकरण बनाने के लिए रेल की समय सारणी को काम में लिया गया है, इस संदर्भ से भी शिक्षार्थी बखूबी परिचित होते हैं। शिक्षार्थी रेखा खींच कर मात्रा में आए बदलाव समझते हैं।</td><td>
इसमें शिक्षार्थियों के सामने नीचे दिए हालात रखे जाते हैं और उन्हें स्टेशन A से तय की गई दूरी को x-अक्ष पर तथा उस दूरी को तय करने में लिए गए समय को y-अक्ष पर लेकर एक वक्र बनाने के लिए कहा जाता है।
<table>
<tr><th>रेल क्रमांक 99991</th><th>स्टेशन का नाम</th><th>आने का समय</th><th>जाने का समय</th><th>स्टेशन A से दूरी(किमी. में)</th></tr>
<tr><td></td><td>A</td><td></td><td>10:00</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>B</td><td>14:30</td><td>15:00</td><td>225</td></tr>
<tr><td></td><td>C</td><td>16:30</td><td>16:40</td><td>300</td></tr>
<tr><td></td><td>D</td><td>18:40</td><td>19:00</td><td>400</td></tr>
<tr><td></td><td>E</td><td>21:00</td><td></td><td>500</td></tr>
</table>
एक बार शिक्षार्थी अपने ग्राफ में इन बिंदुओं को लगा दें, उनसे कहें कि इन पर A, B, C, D, और E लिख दें। शिक्षार्थियों को यहां पर अलग-अलग चुनौतियों का सामना करना पड़ सकता है। सबसे पहले तो, इस सारणी में स्टेशन A से संचयी दूरी दी गई है। शिक्षार्थियों को सभी दो पास-पास के स्टेशनों के बीच की दूरी की गणना करनी पड़ेगी। एक बार यह कर लेने के बाद उन्हें ग्राफ बनाना पड़ेगा। समय का पता लगाना एक सीध-सादा काम है लेकिन इससे यह पता चल सकता है कि शिक्षार्थी समय को घटाने के बारे में क्या सोचते हैं। कृपया उनके विचारों पर ध्यान दें। एक बार जब ग्राफ बन जाए तो शिक्षार्थियों से कहें कि वे नीचे दी गई सारणी भरें।
<table>
<tr><th>स्टेशन</th><th>तय की गई दूरी (x)</th><th>लिया गया समय (y)</th><th>x/y</th></tr>
<tr><td>A to B</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B to C</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C to D</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D to E</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
अगर आपको यह सारणी फायदेमंद लगती है तो आप शिक्षार्थियों से इस सारणी को बनाने के बाद ग्राफ बनाने के लिए कह सकते हैं। कक्षा में चर्चा को आगे बढ़ाने के लिए कई सुरागों का इस्तेमाल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए हम यहां पर कुछ सवाल दे रहे हैं।
<ul>
<li>ग्राफ का आकार कैसा है ?</li>
<li>कौनसे दो शहर आपस में सबसे ज्यादा दूर हैं ?</li>
<li>अपनी बनाई सारणी में क्या आपको कोई पैटर्न नजर आया ?</li>
<li>स्तम्भ x/y में दर्शाई गई मात्राओं को आप क्या कहेंगे ?</li>
</ul>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>गतिविधि-2: इस गतिविधि में, शिक्षार्थी प्रायिकता के विचार पर काम करेंगे तथा अनुपात की संकेत-पद्धति का इस्तेमाल करेंगे। जामुनी द्वारा बाल्टी में रखी लाल व काली गेंदों के साथ खेले गए खेल को, प्रायिकता के विचारों से बच्चों को परिचित करवाने के लिए, हकीकत में अपनी कक्षा में खेल सकते हैं।</td>
<td>शिक्षार्थियों को नीचे दिए गए हालात समझाने हैं।<br><br>रेलवे स्टेशन पर, एक स्टॉल पर जामुनी को तीन बाल्टियां मिली ।<br>बाल्टी A में 2 लाल गेंदे और 4 पीली गेंदें थी। बाल्टी B में 4 लाल गेंदे और 4 पीली गेंदें थी। बाल्टी C में 7 लाल गेंदें और 14 पीली गेंदें थी। जमुनी और उसके दोस्तों ने नीचे दिए गए रोचक सवाल पूछे।<br><br>अमन ने जामुनी से पूछा : ‘अगर तुम हर एक बाल्टी में से एक गेंद निकालो तो इस बात की क्या संभावना है कि वह गेंद लाल होगी ?<br><br>इस वक्त, इस समस्या का सामना दो तरीकों से किया जा सकता है। शिक्षक असल में ऐसी बाल्टी बना या ला सकता है और शिक्षार्थियों से कह सकता है कि वे करके देखें कि क्या होता है। बेशक, कम संख्या में किए गए प्रयत्नों से प्रायिकता गणितीय तौर पर गणना करके निकाली गई संख्या के बराबर नहीं होगी। अध्यापक इस मौके का इस्तेमाल इस चीज पर बातचीत करने के लिए कर सकते हैं कि वास्तविकता में प्रायिकता क्या होती है। यह देखने के लिए कितने प्रयत्न करने की जरूरत पड़ेगी कि बाल्टी A में से लाल गेंद को निकालने की प्रायिकता असल में 1/2 है।
<table>
<tr><th></th><th>लाल गेंदें</th><th>पीली गेंदें</th><th>लाल गेंद को निकालने की प्रायिकता</th></tr>
<tr><td>बाल्टी A</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>बाल्टी B</td><td>4</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>बाल्टी C</td><td>7</td><td>14</td><td></td></tr>
</table>
जब शिक्षार्थी इस सारणी को भर दें तब उनके नीचे दिए गए सवाल पूछें।
<ul>
<li>क्या आपको सारणी के आखिरी स्तम्भ में कोई पैटर्न नजर आता है ?</li>
<li>क्या आप समझा सकते हैं कि आपको यह पैटर्न नजर क्यों आया ?</li>
<li>सारणी के आखिरी स्तम्भ में दी गई राशियां पूरी सारणी में समान रहती है, जबकि प्रत्येक बाल्टी में गेंदों का संख्या अलग-अलग है ?</li>
</ul>
</td>
</tr>
</table>

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- सरल रेखीय समीकरण तथा प्रायिकता की अवधारणा को अपने शब्दों में समझाइए। इन अवधारणाओं में किस जगह पर अनुपात तथा समानुपात के विचारों को इस्तेमाल किया जा सकता है ?
- क्या अनुपात तथा समानुपात को दर्शाने के लिए दूसरे किन्हीं गाणितीय विचारों का इस्तेमाल किया जा सकता है ? उन विचारों को विस्तार से समझाएं।
- सभी गतिविधियों के हो जाने के बाद नीचे दिए गए बिंदुओं पर पुनर्चिंतन करिए।
  - इस पाठ पर काम करते वक्त शिक्षार्थियों ने जिन चुनौतियों का सामना किया हो, उनमें से तीन की सूची बनाइए।
  - उन तीन कार्यनीतियों (सही या गलत) की सूची बनाइए जिनकी आपको शिक्षार्थियों से बिल्कुल उम्मीद नहीं थी।

# इकाई 4: अनुपात तथा समानुपात को इस्तेमाल करना

## पाठ 4.2: मिश्र अनुपात तथा समानुपात

### पाठ का अवलोकन (ओवरव्यू)
जामुनी द्वारा खेले गए बाल्टी-गेंद वाले खेल में, शिक्षार्थी बाल्टी में से निकाली गई एक लाल या एक पीली गेंद की प्रायिकता लिखेंगे। दूसरे पाठ में, शिक्षार्थी अनुपात के अंकगणित पर काम करते हैं। वे मिश्र अनुपात पाते हैं, अनुपातों को खाना बनाने के तरीकों पर लागू करते हैं और असली जिंदगी के संदर्भों वाली समस्याओं पर काम करते हैं। मिश्र अनुपात के लिए इस बात की तार्किक समझ जरूरी होती है कि ऐसी दो मात्राएं आपस में समानुपाती होती है, जब उन्हें दूसरी दो मात्राओं से गुणा किया जता है जो कि पहले ही एक दूसरे के साथ समानुपाती होती है, उसके बाद भी वे आपस में समानुपाती ही रहती है।

### सीखने के उद्देश्य
इसमें शिक्षार्थी सीखेंगे,
- आनुपातिक तर्क की अपनी समझ को प्रायिकता वाले हालातों में इस्तेमाल कर पाना।
- मिश्र अनुपात तथा समानुपात को समझाना तथा इस्तेमाल करना।
- अनुपात-समानुपात की अवधारणाओं को गणित के दूसरे विचारों से जोड़ पाना।.

### गणितीय विचारों पर चर्चा
इस हिस्सें में हम पाठ से कुछ उदाहरण लेकर उन पर चर्चा करते हैं तथा उन उदाहरणों से जुड़े शिक्षार्थियों के विचारों पर बातचीत करते हैं। हम अध्यापकों को इन कामों के इर्द गिर्द चर्चा को केन्द्रित रखने के साथ-साथ ही पाठ के गणितीय प्रक्षेपपथ (यानी ट्रेजेक्टरीज) को समझने के लिए लिए सुराग उपलब्ध करवाते हैं।

| काम और गणितीय प्रासंगिकता | शिक्षार्थियों के विचार तथा और उनके सीखने में मददगार संभावित कार्यनीतियां |
|---|---|
| **गतिविधि-1:** आखिरी इकाई के इस आखिरी पाठ में, शिक्षार्थी असली जिंदगी की ऐसी समस्याओं पर काम करेंगे जिनमें अनुपात-समानुपात तथा मिश्र अनुपात शामिल होते हैं। उनमें किए गए काम तथा उसमें लगाए गए समय के संदर्भ का इस्तेमाल किया गया है। | शिक्षार्थी ऐसे हालातों पर काम करेंगे जिनमें किया गया काम भी बदलता है और उसमें लगाया गया समय भी बदलता है।<br><br>जामुनी और उसके दोस्त मेले से लौट कर घर आ गए। जब जामुनी अपने अभिभावकों के काम की जगह पर जाती है तो वह देखती है कि मजदूरों की एक टोली 400 मीटर लंबी दीवार 12 दिन में बनाती है और उसे बनाने के लिए हर रोज 8 घंटे काम करती है। अगर वही मजदूर रोज 9 घंटे काम करते हैं तो 600 मीटर लंबी एक दीवार बनाने में उन्हें कितना वक्त लगेगा ?<br><br>यहां पर छात्रों से उम्मीद है कि वे किए गए काम और उसमें लगाए गए समय के बीच के अनुपात को समझें और उस अनुपात का इस्तेमाल काम में लगने वाले दिनों की संख्या का पता लगाने के लिए करें जो कि 600 मीटर लंबी दीवार बनाने में लगेंगे।<br><br>अनुपात पर काम जारी रखते हुए शिक्षार्थी नीचे दिए हुए काम करें।<br><br>जामुनी की मां बैंक में 4500 रुपए जमा करवाती है और उसे 2 साल बाद उस रकम पर 307 रुपए ब्याज के मिलते हैं। अगर वह 6000 जमा करवाती तो 5 साल के बाद उसको कितना ब्याज मिलता ?<br><br>इस में शिक्षार्थियों को पहले ब्याज की दर का पता लगाना है जो कि जमा कराई गई रकम तथा बरसों की संख्या के बीच में पाए जाने वाले अनुपात से निकाली जाएगी और उसके बाद उस अनुपात का इस्तेमाल 6000 रुपए पर ब्याज का पता लगाने में करना है।<br><br>अध्यापक यहां पर इस बात पर चर्चा कर सकता है कि किस तरह से ब्याज की दर भी एक अनुपात है और इस रूप में शिक्षार्थी कौन से दूसरे अनुपातों को देख सकते हैं |

| | |
|---|---|
| **गतिविधि-2:** यह गतिविधि एक दूसरे परिचित हालात का इस्तेमाल करती है और शिक्षार्थियों को इस बात का मौका देती है कि वे अनुपात तथा समानुपात संबंधी अपने ज्ञान का अभ्यास कर पाएं।<br><br>एक दिन शाम के वक्त, जामुनी, अमन, लीना और साहिर एक चाय की दुकान पर बैठे हैं। दुकानदार द्वारा चाय बनाने में इस्तेमाल किया गया नुस्खा नीचे दिया गया है।<br><br>• चाय पत्ती - 2 चम्मच<br>• शक्कर - 4 चम्मच<br>• चीनी - 12 चम्मच<br>• पानी - 20 चम्मच<br><br>आधे घंटे बाद जामुनी के अभिभावक भी उनके साथ आकर बैठ जाते हैं और सभी मिलकर तय करते हैं कि वे एक एक कप चाय का पीएंगे। आपको यह पता लगाना है कि 6 लोगों के लिए चाय बनाने के लिए हर एक चीज़ की कितनी मात्रा की जरूरत पड़ेगी अगर चाय का स्वाद वैसा रहे, जैसा कि पहले बनाई गई चाय का था।<br><br>• चाय पत्ती - __________ चम्मच<br>• शक्कर - __________ चम्मच<br>• चीनी - __________ चम्मच<br>• पानी - ___________ चम्मच | शिक्षार्थियों के सामने प्रस्तुत किए गए हालातों में चाय बनाने का तरीका शामिल है और उसे पैमाने की मदद से बढ़ा 6 व्यक्तियों के लिए इस्तेमाल करना है। यह एक परिचित गतिविधि है और शिक्षार्थी अपने जवाबों तक कैसे पहुंचे, इसे ठीक से जानने के लिए अध्यापकों को उनसे सवाल जरूर पूछने चाहिए।<br><br>छह व्यक्तियों के लिए चाय बनाने के लिए जितने सामान की जरूरत पड़ेगी उसे नीचे दी गई सूची में भरिए। चाय का स्वाद एकदम वैसा ही होना चाहिए जैसा पहले बनाई चाय का था।<br><br>• चाय पत्ती - __________ चम्मच<br>• शक्कर - __________ चम्मच<br>• चीनी - __________ चम्मच<br>• पानी - ___________ चम्मच<br><br>इन सवालों का जवाब पाने के लिए शिक्षार्थियों को आंतरिक तथा बाहरी अनुपातों को काम में लेना चाहिए। |

**अध्यापक का पुनर्चिंतन तथा अवलोकन**

- आप क्या सोचते हैं कि आपके शिक्षार्थियों ने इस मॉड्यूल पर काम करने के दौरान क्या सीखा होगा।
- रोजमर्रा की जिंदगी के संदर्भों में प्रतिशत का इस्तेमाल करते हुए अनुपात-समानुपात की एक समस्या बनाइए। अनुपात के विचारों को इस समस्या में कैसे काम लिया गया है, इसे समझाइए।
- ज्यामिति का एक सवाल बनाइए जिसमें अनुपात तथा समानुपात की समझ का इस्तेमाल किया गया हो। इस समस्या को बनाते वक्त अपने सोचने की प्रक्रिया के बारे में लिखिए।
- अपने सहकर्मियों से कहिए कि वे आपके बनाए सवालों को हल करें।

नोट: प्रत्येक यूनिट के अंत में एक मूल्यांकन सबक है।

## MY NOTES

भविष्य की पुनर्कल्पना RE-IMAGINING FUTURES
TISS

CLI
CONNECTED LEARNING INITIATIVE